Поговорим про теорию меры.

Наивное определение меры:
Для отрезков и прочих лучей это длина
Для всего двумерного это площадь
Для трёхмерного – объём.

Более строгое определение меры:
Мера – функция, ставящая всоответствию множеству неотрицательное число.
Обладает свойствами аддитивности:
Мера суммы двух подмножеств не превосходит суммы их мер

На самом деле и это не строгое определение меры. На ФФ есть факультативный курс по теории меры, его ведёт Дмитрий Дмитриевич Соколов. Там вот всё по хардкору, как на мехмате – сначала вводится понятие верхней меры, затем просто меры (причём верхняя мера мерой не является). Там 100500 нюансов, мы в них углубляться не будем. Будем отталкиваться от наивного, интуитивного определения меры.

Теперь давайте обсудим интеграл Лебега. Это обобщение привычного нам интеграла Римана. Благодаря тому, что это именно обобщение, интеграл Лебега позволяет брать интегралы от функций, которые не может взять Риман.

Например, это функция Римана:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{если } x \text{ иррационально} \\ f(x) = 1, \text{если x рационально} \end{cases}$$

График:


$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

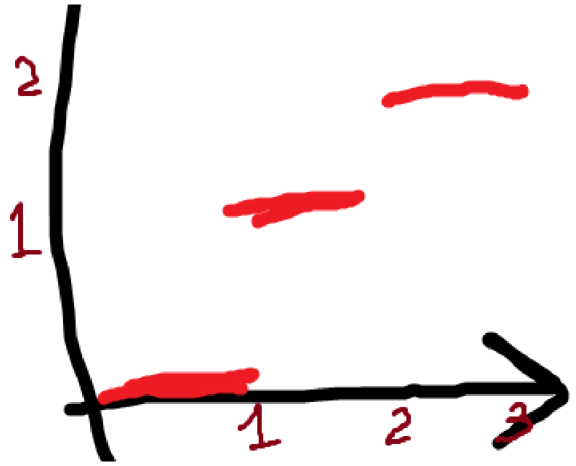
Какая идея интеграла Лебега? Интеграл Римана работает с областью определения функции (ООФ): он делит её на dx, dxdy в двумерном случае и т.д. и т.п., находит в каждом кусочке ООФ значение функции, а далее суммирует.

$$\sum_{dx\text{, из которых состоит ООФ}} dx * f(x \text{ в } dx)$$

Интеграл Лебега работает не с ООФ, а с МЗФ – множеством значений функции. Для каждого значения МЗФ он вычисляет меру множества из ООФ, где оно достигается. И затем суммирует.

$$\sum_{y \text{ из МЗФ}} \text{мера}(\text{мн} - \text{во таких } x, \text{что}: f(x) = y) * y$$

Посмотрим на наиболее наглядном примере: ступеньке:




Её может взять и интеграл Римана, но мы посмотрим, как размышляет интеграл Лебега. Он говорит: у нас в МЗФ всего 3 значения: 0, 1 и 2. 0 достигается на отрезке длины 1, 1  достигается на отрезке длины 1, 2 достигается на отрезке длины 1. Всего 0*1+1*1+2*1=3. Ответ: 3.

Тот же ответ мы могли бы получить интегралом Римана. Должно ли нас это удивлять? Нет: там, где работает Риман, он выдаёт тот же результат, что и Лебег.

Так давайте применим интеграл Лебега там, где не сработает интеграл Римана – к функции Лебега:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{если } x \text{ иррационально} \\ f(x) = 1, \text{если x рационально} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

Давайте рассуждать. МЗФ из двух точек: 0 и 1. Какая мера множества, где достигается 0? |b-a|, а там, где 1 – ноль.

Возможно, читателю неочевидно, почему мера рациональных точек на любом конечном отрезке равна 0.
Приведём доказательствоот противного: пусть она ε>0. Окружим каждую рациональную точку с номером n (мы можем их пронумеровать, т.к. рациональных чисел счётное число) отрезком длины $\frac{\varepsilon}{n^2\pi^2}$. Тогда мера множества не превосходит суммы мер подмножеств: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n^2\pi^2} = \frac{\varepsilon}{6}$<ε – ч.т.д.

Тем самым интеграл равен $0 * (b - a) + 1 * 0 = 0$. Можно сказать, что иррациональные числа победили – их больше.

Потренируемся ещё. Везде$f(x)$ – функция Римана.
Упражнение 1.

$$\int_1^{10} \exp(f(x))\,dx = ?$$

Решение: МЗФ состоит из двух точек: 1 и е. 1 достигается на множестве меры 9, е на множестве меры 0. Ответ: 9.

Упражнение 2. Подсчитать интеграл

$$\int_1^2 x^2 f(x)\,dx = ?$$


Решение: тут сложнее, потому что МЗФ не 0, а представляет собой [1..4] с обширными «выколотостями». Снова нужно догадаться, что «выколотости» победят и мера оставшихся точек 0. Дело в том, что квадрат любого рационального числа также рационален. Следовательно, не выколоты лишь рациональные точки, а, как мы знаем, их мера 0. Интеграл =0.

Упражнение 3.

$$\int_{0}^{0,1} \sin f(x) * f(x)\, dx = ?$$

Решение: рассуждение «квадрат любого рационального числа также рационален» уже не канает, т.к. синус рационального числа может быть иррациональным. Но тут нас спасёт идея взаимно однозначного соответствия – точек, соответствующих синусу рациональных чисел, столько же, сколько и их самих, а значит, интеграл =0.

МЗФ состоит из двух точек: 1 и е. 1 достигается на множестве меры 9, е на множестве меры 0. Ответ: 9.