Последняя тема линала – тензоры. Проходится галопом по Европам, на мой взгляд, отвратительно.

Попытаюсь дать хоть какое-то понимание. Совсем углубляться в тему не будем – поймёте всё-всё-всё на СТО в 5-м семестре.

Это адски сложная тема!
Я помню, как я её пытался заботать в конце 2-го сема – безрезультатно. Мне попалась вот
эта https://drive.google.com/file/d/1vfPihQ8lo7LVksKA2QNbxQ6MGLGTGQoq/view методичка. Я её прочитал и ничего не понял.
Сказать, что она прямо плохая, я не могу. Автор объясняет достаточно живо, «с огоньком». Но суперпонятной тоже не назову. Потом объясню, какая у меня к ней основная претензия.
(Кстати, моя методичка тоже может оказаться говном – на момент её написания автор на 4-м курсе и всё, о чём он пишет, ему очевидно, а для читателя, конечно, это взрыв мозга. Народ, я постарался, насколько мог, «деградировать» до уровня первого курса. Если что-то непонятно, пишите в личку, я дополню методичку).

Предлагается, что читатель уже прочёл мою первую методичку по тензорам – посвящённую двензору инерции. Рекомендую ознакомиться ещё с некоторыми двензорами – например, сделать это в томе 7 Фейнмановских лекций по общей физике http://www.ftechedu.ru/1sem/books/fiz/Feynman/tom7.pdf , с 24-й стр по 48-ю. Я же в своей методичке сделаю упор именно на линал.

Итак, тензоры – очень общее понятие. К ним относятся:
Числа с «биркой»
Столбцы с «биркой», т.е. вектора
Матрицы с «биркой», т.е. матрицы…
Стоп! А что за бирка?

Знаете джинсы с биркой «как стирать, как гладить»? У тензоров «бирка» - это правило, как обращаться с тензором, т.е. как преобразуются его координаты при переходе в другой базис.

Т.е. если я на компе задам матрицу, это всего лишь будет матрица. Это не будет двензор – «бирки» нет.

Вот вам ещё пример. Что такое вектор? Вы наверняка «представили» стрелочку в пространстве. Представим, что мы поменяли систему координат (СК). У стрелочки поменялись координаты – если мы их «забудем» поменять, то данной тройке чисел {x,y,z} будет соответствовать другая стрелочка.

Так как «обрабатывается» тензор при переходе в другую СК?
Нужно каждую компоненту обработать.
Скажем, есть у нас тензор T^{ab}_{cd} и мы его переписываем в новых СК:

$$T^{AB}_{CD} = \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d Q^A_a \, Q^B_b Q^c_C Q^d_D$$

где Q – матрица перехода.
Заметьте, что некоторые индексы я пишу сверху, а некоторые снизу. Важно ли это? Вообще говоря – да, но ПОКА забейте и пишите где угодно. Мы в конце методичке доберёмся до этого вопроса.

Вопрос: Дались тебе эти переходы в другую СК! Мы всю линейную алгебру только и делаем, что бегаем между базисами. Не пора ли остановиться?
Ответ: Нет, не пора. Как называется СТО? Специальная Теория ***Отврати… относительности***. Она говорит нам, как преобразуются физические величины при переходе в другую СК. Там практически единственный постулат – это то, что все физические величины тензорны, т.е. пересчитываются по «бирке». Отсюда вытекают и постоянство скорости света, и сокращение длины, и всё на свете. ОТО – общая теория относительности – обобщает СТО на случай произвольных СК, а не только инерциальных.
Но это всё дела… грядущих для вас, читателей, лет. А пока я замечу, что на 1-м курсе я тоже ворчал «да хватит бегать по СК».

Операции над тензорами (помимо переходов между СК)
Тензорное сложение
Сложим два тензора:

```
double A[3][3][3];
double B[3][3][3];
```

Результатом будет тензор

```
double C[3][3][3];
```

которой будет инициализирован по правилу

```
for (i=0; i<4; ++i)
for (j=0, j<4, ++j)
for (k=0, k<4, ++k)
C[i][j][k]=A[i][j][k]+B[i][j][k]
```

Ничего сложного тут нет. Складывать, конечно можно можно два тензора одинаковой валентности.
(да, и у меня все тензоры имеют 4 координаты, в духе СТО. Вы легко можете переписать на 3 координаты)
Кстати, количество индексов мы будем называть или рангом, или валентностью.

Бессвёрточное тензорное умножение (или же просто тензорное умножение)
Перемножать можно тензоры уже любого ранга. Перемножим тензоры
double A[3][3]; с индекса i,j
double B[3][3][3]; с индексами p,q,r
результатом будет тензор валентности суммы валентности двух начальных тензоров, т.е. 5
double C[3][3][3][3][3]; с индекса i,j, p,q,r
который будет проинициализирован по правилу

```
for (i=0; i<4; ++i)
for (j=0, j<4, ++j)
for (p=0, p<4, ++p)
for (q=0, q<4, ++q)
for (r=0, r<4, ++r)
C[i][j][p][q][r]=A[i][j]*B[p][q][r]
```

Данная операция - некое обобщение матричного умножения. В тензоре A 16 компонент, в тензоре 64 компонент, их попарно умножают (всего 16*64 пар) и все возможные произведения записывают в новом тензоре.

В одну строчку наше умножение запишется как

$$C_{ijpqr} = A_{ij} \cdot B_{pqr}$$

Частный случай тензорного умножения – умножение на число. Ведь число – это тензор нулевой валентности. В этом случае все компоненты этого тензора просто домножаются на это число.

Тензорное умножение двух векторов - это матрица, а не число!

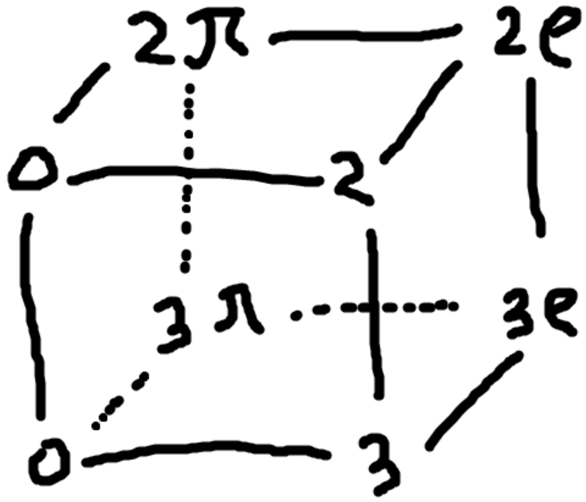
Пример.
Тензорно умножим матрицу

$$\begin{pmatrix} \pi & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На столбец

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

По правилам мы должны попарно перемножить все компоненты и запихнуть их в кубик. Получим нечто такое:



В результате перемножения тензоров валентности m и валентности n итоговый тензор будет иметь валентность m+n.

Забавно вышло: мы перемножили два вектора и получили матрицу. Обычно мы перемножаем два вектора и получаем скаляр (т.н. скалярное произведение). Дело в том, что скалярное произведение – это не просто тензорное умножение, а со свёрткой.

Свёрточное тензорное умножение, или свёртка

Рассмотрим пример:

double A[3][3]; с индекса i,j

double B[3][3][3]; с индексами p,q,r.

И мы вдруг захотели их свернуть.

Для этого нам нужно выбрать по индексу в каждом тензоре. Ну, допустим, в A мы выбрали i, в B – r.

Всё, их не будет в конечном тензоре С! Он будет тензором третьего ранга (тринзором): C[j][p][q].

Теперь мы готовы написать инициализацию конечного тринзора:

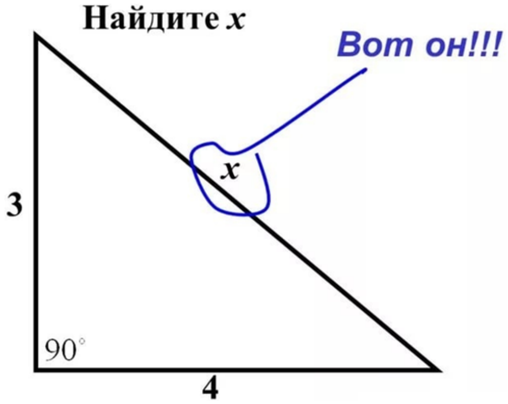
```
for (j=0, j<4, ++j)
for (p=0, p<4, ++p)
for (q=0, q<4, ++q)
//итак, теперь здесь должно быть C[j][p][q]… а нет, ещё два for:
for (ir=0; ir<4; ++ir)
C[j][p][q]+=A[ir][j]*B[p][q][ir]r
```

Какие отличия от тензорного умножения?

Во-первых, тензор в ответе имеет ранг суммы валентности двух начальных тензоров МИНУС ДВА, т.е. 2+3-2, т.е. 3. Индексы будут только те, которые не будут свёрнуты, т.е. j,p,q. А свёрнуты те индексы, которые стоят у g-шки.

Верхние и нижние индексы. Поднятие и спуск индекса

Вам наверняка будут рассказывать про операции поднятия и спуска индексов. Мне вспоминается один анекдот:



Та же шутка применима и к операциям поднятия и спуска индекса. Это делается так: стёрли сверху и приписали снизу ☺ Разве не так? Разве есть разница между верхними и нижними индексами?

Ответ: да, у них разные «бирки»: верхние преобразуются по обратной матрице перехода, а нижние по прямой.

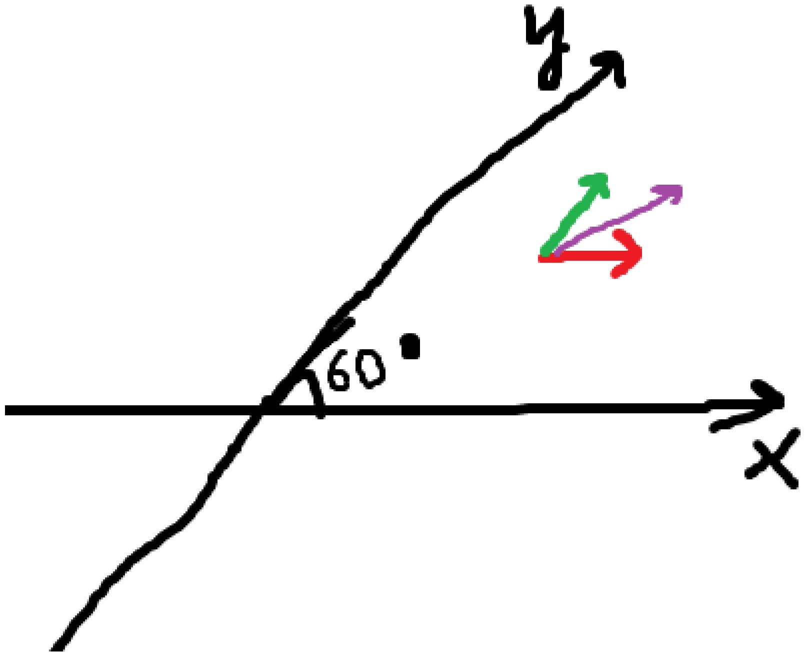
$$T_{CD}^{AB} = \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d Q_a^A \, Q_b^B \, Q_C^c Q_D^d$$

Q_a^A - прямая матрица перехода, Q_C^c - обратная матрица перехода. $Q_C^c = (Q_a^A)^{-1}$

Основная проблема в том, что в декартовой СК нет разницы между нижними и верхними индексами. Именно это делает эту тему адски сложной.

И именно это моя главная претензия к методичке https://drive.google.com/file/d/1vfPihQ8lo7LVksKA2QNbxQ6MGLGTGQoq/view
Там разделение на верхние и нижние индексы вводится сразу.

Чтобы почувствовать это разделение на верхние и нижние индексы, нужно или
а) метрика СТОшная, псевдоскалярная, Минковского
но понять СТО – это отдельная песня. Это не фунт изюму. Я в 5-м семе ботал СТО около 4 недель.
б) рассмотреть «плохую» СК. Плохая – это та, где метрический двензор (на линале он называется «матрица Грама») имеет нетривиальный вид.
Например, когда оси неортогональны:



Я бы мог заморочиться и показать всё причуды «плохой» СК, но (вспоминая себя на 1-м курсе) читатель пролистнёт эти выкладки со словами «зачем, если можно работать в «хорошей» СК и не страдать?»

Так что лишь предлагаю довериться в мне: в «плохой» СК вектора P_a и P^a различны, т.е. имеют разные компоненты.
Например, в метрике Минковского $P_0 = P^0, P_1 = -P^1, P_2 = -P^2, P_3 = -P^3$

А в «нормальных» СК компоненты совпадают, поэтому нам кажется, что разницы в верхних и нижних индексах нет.

Ковариантиность и контрвариантность
Немного терминологии: верхние индексы называются контрвариантными, нижние ковариантными. Мой преподаватель по квантовой электродинамике, Никитин,

отказывался называть их «контрвариантными» и «ковариантными» - мол, никто не помнит, проще «верхние» и «нижние». Но он учился на Физтехе и явно не сдавал линал кафмату ☺ Он требует «ковариантные» и «контрвариатные».

Откуда такая странная терминология? Потому что ковариантные компоненты по прямой матрице перехода, а контрваринатные – по обратной.

Кажется, что ковариантные поприятней – они и пишутся снизу (привычней), и название короче («ко» против «контр»), и прямая матрица перехода, а не обратная. Как бы не так. Если дело касается векторов, тут однозначно: вектор с верхними контрвариантными компонентами – ван лав, с нижними ковариантными – урод. Потому что все привычные нам вектора – это именно ***контрварианты***, и преобразуются они именно по обратной матрице перехода.

Вернёмся к свёртке. Сворачивать можно лишь тогда, когда одна координата в одном тензоре является нижней, а в другом верхнем. Это называется традиционные ценности ☺
А вот свернуть A_{qr}^{p} и B_s по q и s не получится – это по-гейски (или по-лесбиянски, как хотите). Нужно предварительно поднимать у одного из тензоров индекс, т.е.

$$B^s = \sum_S g^{Ss}\, B_s$$

где g^{Ss} - метрический тензор. Кстати, это не совсем матрица Грама, потому что последняя – это g_{sS}. (Я чувствую, что у вас уже голова стынет от верхних и нижних индексов – моя бы воля, не рассказывал бы их до СТО, но кафмат считает иначе).

Кажется, что тензоры – это некрасиво…
Давайте я вам приведу один интересный факт касательно тензоров. Красивый факт!
Рассмотрим тензоры с симметричным количеством индексов сверху и снизу, чтобы сворачивать было проще:

$$T_{cd}^{ab}$$

Давайте его свернем. Сначала по одной паре пеменных:

$$T_d^b = \sum_k T_{kd}^{kb}$$

А затем по другой:

$$T = \sum_k T_k^k$$

Получили 1 число – скаляр.
Так вот, оно будет одно и то же во всех декартовых СК! Какую бы мы декартову СК не взяли, как бы мы не поворачивали-вертели оси – компоненты исходного тензора T_{cd}^{ab} будут, естественно, разные, а вот Т после свёртки – одно и то же число.
Вот и польза от наших «бирок» - то, что компоненты тензора при переходе в другую СК преобразуются по «бирке», позволяет нам увидеть такую закономерность.

Рассмотрим частный случай: свёрточно умножим v_k и v^k (мы знаем, что в декартовой СК это одно и то же):

$$v = \sum_k v_k v^k$$

(с тем же успехом мы могли их сначала бессвёрточно тензорно умножить, а получившийся двензор свернуть по паре переменных).
Разумеется, v будет одна и та же во всех декартовых СК. Но что это? А это $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ – длина вектора! Ну как бы очевидно, что это длина вектора, и она во всех СК одинакова. Т.е. мы можем сказать, что вот этот скаляр T из предыдущего абзаца мы можем назвать «длиной» тензора T_{cd}^{ab}.

Кстати, скорость света тоже можно получить свёрткой одной тензора. Так что и «скорость света во всех инерциальных СК одинакова» (С) Эйнштейн тоже вытекает из тензорности.

Вроде всё рассказал. Ребята, простите за некий сумбур – я был вынужден рассказать нетривиальную тему из 5-го семестра во 2-м. Надеюсь, вы хоть что-то поняли.