Тема конформных отображений традиционно является одной из самых сложных в ТФКП.
Я на втором курсе её особо не понял. Теперь я на 5 курсе и попытаюсь для вас её расширить.

Конформное отображение – взаимно отображение аналитической комплексной функции комплексного переменной вместе с областью задания:

А где это применяется? При решении дифференциального уравнения в частных произведениях (далее ДУ в ЧП) Лапласа в двух переменных:

$$\Delta\varphi(x, y) = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

А вот оно уже в физике встречается повсюду. Это и электростатика:

$$\Delta\varphi(x, y) = 0$$

Это и гидродинамика несжимающихся жидкостей, где $\vec{v} = grad\ u,$ а $\Delta u(x, y) = 0.$

Вопрос: да что там решать, очевидно решение: $\boldsymbol{u = ax + by + c}$, a,b,c – произвольные константы.
Ответ: это не просто ДУ, а ДУ в частных производных!!! Вот вы сейчас на 2 курсе, у вас даже курса дифуров не было, а ДУ в ЧП – это вообще по ММФ. (ТФКП мало что самый бесполезный курс кафмата, так и даётся раньше всего). Конечно, $u = ax + by + c$ - решение, но оно не самое общее. ДУ в ЧП тем и коварны, что их общее решение определено не с точностью до констант, а до функции ☺ Вообще заготовка под общее решение выглядит так:

$$\varphi(\vec{r}) = \iint \frac{\rho(\vec{r}^I)dV(\vec{r}^I)}{|\vec{r}^I - \vec{r}|}$$

где $\rho(\vec{r}^I)$ - произвольная функция (ну там непрерывная, дифференцируемая и т.п.). Подробнее это у вас будет на ММФ.

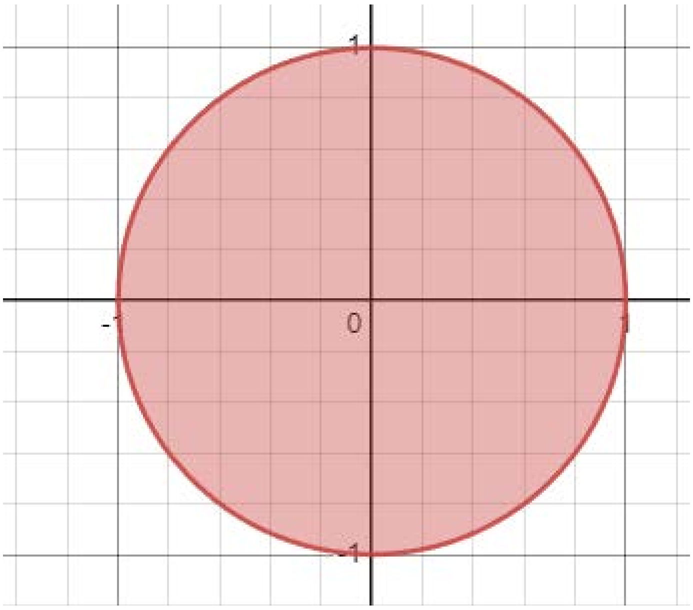
Но в реальности у нас к ДУ в ЧП прилагаются граничные условия:

$$\varphi(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) - \text{ задана, если } \vec{r} \text{ лежит на границе}$$

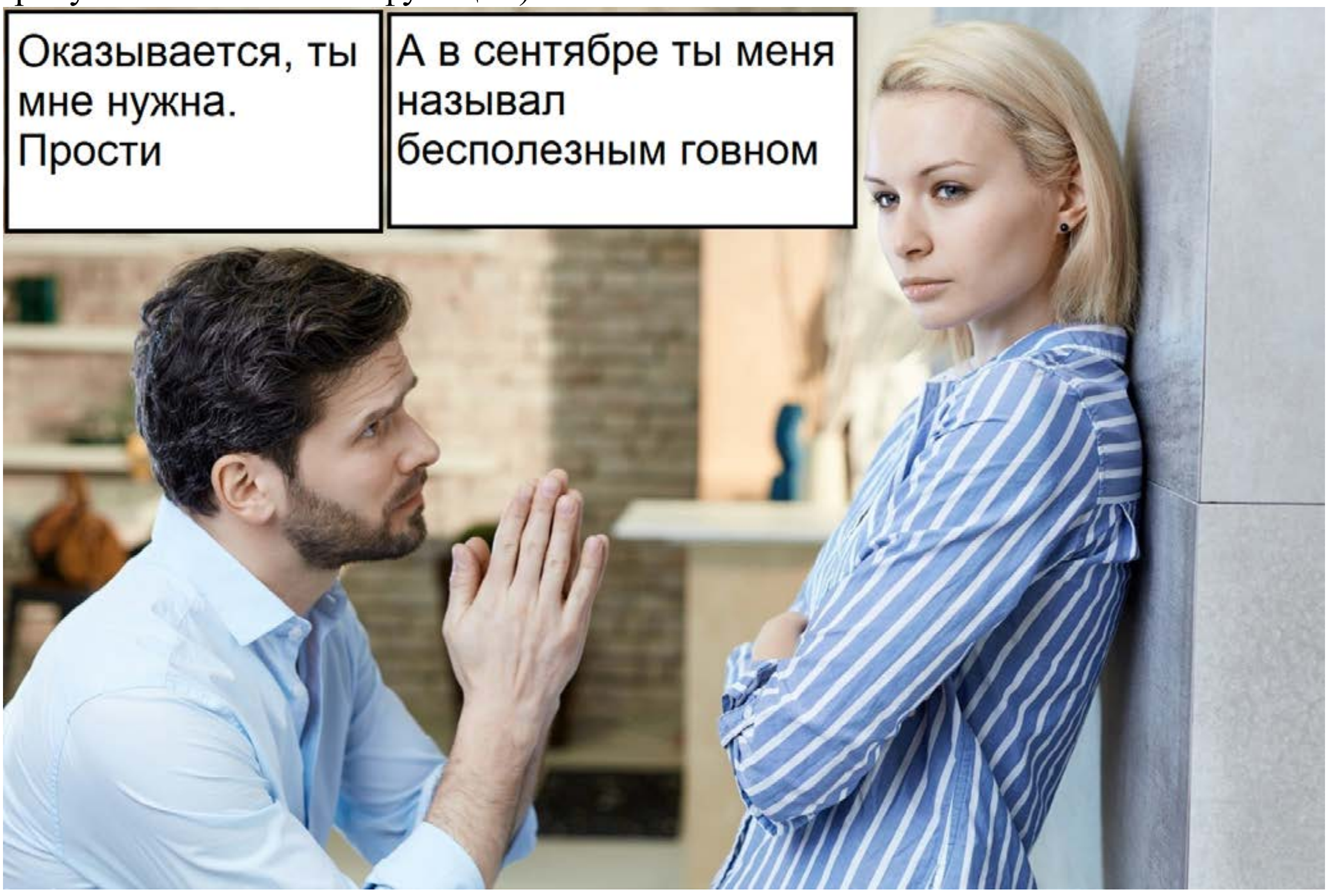
Т.е. нам нужно решить систему:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0 \\ \varphi(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) \end{cases}$$

Идея решения:
1) Тот факт, что $\Delta\varphi(x, y) = 0$, позволяет использовать ТФКП, рассматривая вместо x и y одну комплексную переменную z: $f(z)$. (равенство нулю лапласиана обеспечивает аналитичность, необходимую для последующих теорем).
2) Перейти от «кривой» области к красивой – как правило, к кругу радиусом 1:



Почему? Потому что там есть формула среднего значения (которая как раз и требует аналитичности функций)



которая позволяет выразить значение в любой внутренней точке:

$$u(r_0, \varphi_0) = U|_{w=0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(\psi)\,d\psi.$$

Вопрос: почему Тихонов и Свешников (откуда я тырю формулы) перешли в полярные координаты?

Ответ: чтобы было легко записать интеграл по окружности.

Это почти ответ, но надо понять, что в интеграле $A(\Psi)$, а у нас были граничные условия $\alpha(\vec{r})$. Нужно их выразить одно через другое.

Вот тут и нужно конформное отображение. (Сейчас будут скучные выкладки, которые можно будет пропустить). В общем виде это

$$w = f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{z - \dfrac{a^2}{\bar{z}_0}} = \lambda \frac{z - r_0 e^{i\varphi_0}}{z - \dfrac{a^2}{r_0} e^{i\varphi_0}},$$

$$e^{i\psi} = \frac{a}{r_0} \frac{a e^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}}{a e^{i\varphi} - \dfrac{a^2}{r_0} e^{i\varphi_0}},$$

откуда $$d\psi = \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi.$$

Поэтому, сделав в интеграле (7.16) замену переменной интегрирования $\psi = \psi(\varphi)$, где связь переменных ψ и φ определяется формулой (7.17), получим

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \alpha(\varphi)\, d\varphi. \tag{7.18}$$

Формула (7.18) и дает явное аналитическое выражение решения задачи Дирихле для круга радиуса a через функцию граничных условий $\alpha(\varphi)$. Эта формула, носящая название интеграла Пуассона, может быть получена и рядом других способов, например методом разделения переменных или с помощью функции источника *).

Полученные результаты позволяют в принципе решить задачу Дирихле для любой области $\mathcal{G}$, которую можно конформно отобразить на единичный круг $|w| \leqslant 1$ плоскости w.

Главное, что мы должны вынести – это то, что самая сложная часть – это подобрать конформное отображение, делающее из нашей говнообласти хорошую область – круг (далее-то тупая подстановка в интеграл Пуассона и ответ). Именно поэтому на семинарах вы ищете 100500 конформных отображений и страдаете. Потому что это творческая, нестандартная часть.

Пример для конкретной говнообласти: полуплоскость.

Пример 1. Решение задачи Дирихле для полуплоскости. Пусть требуется определить ограниченную на бесконечности функцию $u(x, y)$, гармоническую в верхней полуплоскости $y > 0$, непрерывную при $y \geqslant 0$ и принимающую заданные значения:

$$u(x, 0) = \alpha(x) \quad \text{при } y = 0. \tag{7.19}$$

Отобразим конформно верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, чтобы заданная точка $z_0 = x_0 + iy_0$ $(y_0 > 0)$ перешла в центр $w = 0$ этого круга. Как легко видеть, это преобразование осуществляется дробно-линейной функцией:

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \tag{7.20}$$

При этом граничные точки связаны соотношением

$$e^{i\psi} = \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \tag{7.21}$$

и граничная функция $\alpha(x)$ переходит в функцию $A(\psi) = \alpha[x(\psi)]$, где $x(\psi)$ определяется из соотношения (7.21). Заметим, что соотношение (7.21) дает

$$d\psi = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\, dx. \tag{7.22}$$

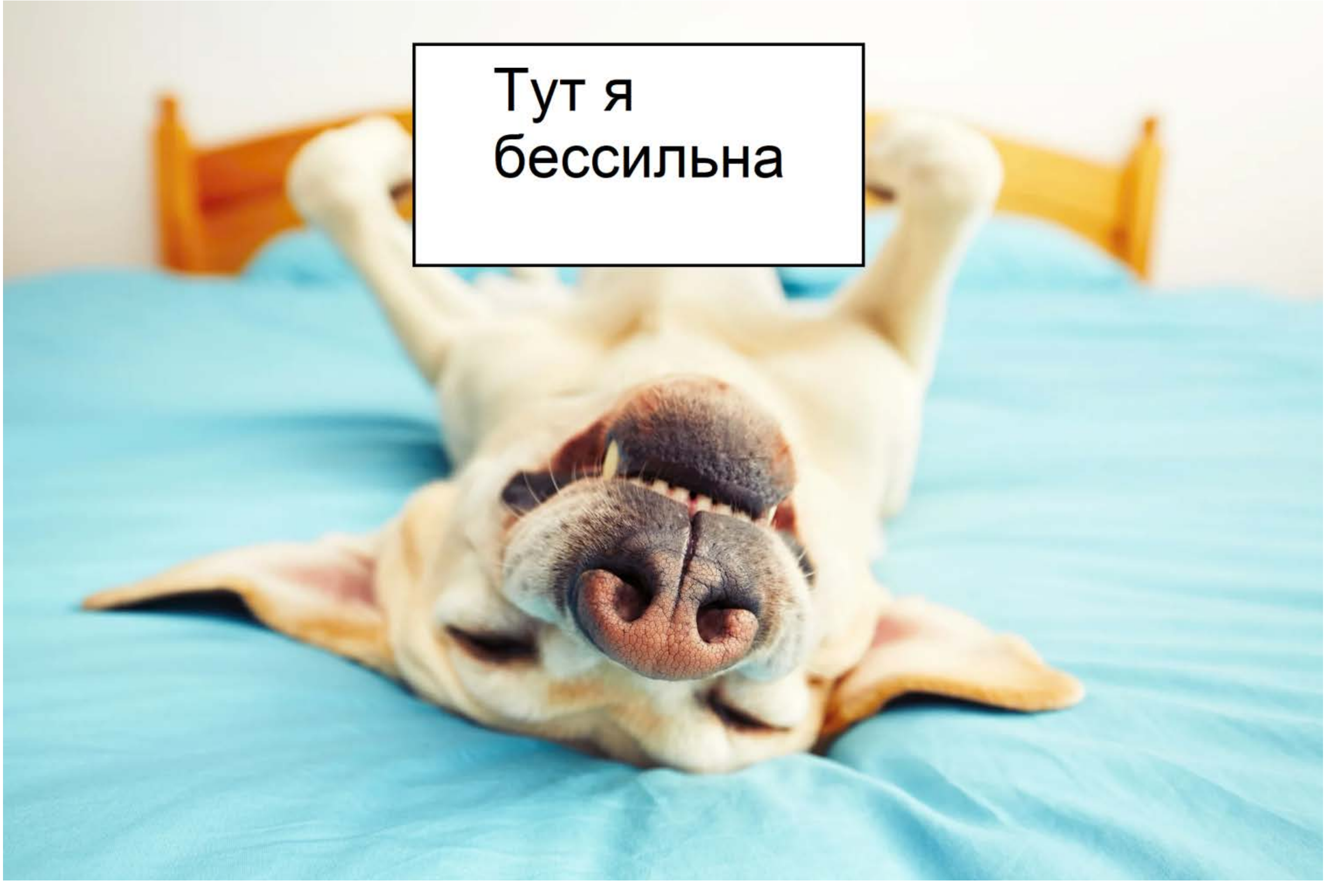
Значение искомой функции $u(x, y)$ в точке x_0, y_0 определяется интегралом (7.16). Произведя в нем замену переменной интегрирования по формулам (7.21), (7.22), получим

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\, \alpha(x)\, dx, \tag{7.23}$$

что и дает решение поставленной задачи. Формула (7.23), дающая решение задачи Дирихле для полуплоскости, носит также название интеграла Пуассона.

Вопросы: офигенно! Так почему ты считаешь ТФКП бесполезным предметом?

Ответ: вся эта теория хорошо работает, пока переменных 2: x и y. Как только их становится 3 или больше, ТФКП



Поэтому у вас на ММФ будут похожие теоремы (тот же принцип максимума, та же формула среднего значения), будут выводиться интегралы Пуассона - но и то, и то уже для функций произвольного количества переменных. Так что ММФ топ, а ТФКП говно.

Вопрос: а разве нет ли обобщения комплексного числа $z(x, y) = x + yi$ на случай трёх переменных?
Ответ: Нет. Гамильтон в 19 веке пытался придумать, но у него вышло только для четырёх. Эти числа назвали кватернионами, можете погуглить.