Функционал
В линале: нечто, делающее из элемента линейного пространства число.
Например, длина вектора:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^2$$

В интурах в роде элементов линейного пространства у нас выступают функции, поэтому функционал – это то, что делает из функции число.
Например, это значение функции в любой заданной точке: $f(C)$, или вот такой интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

Или такой

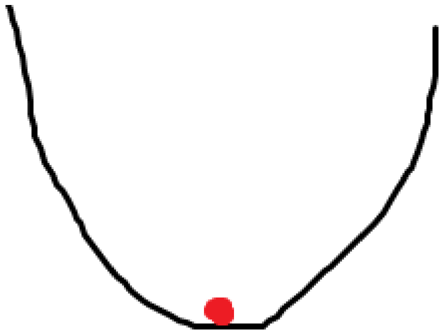
$$\int_a^b f^2(x)dx$$

Да пусть даже такой:

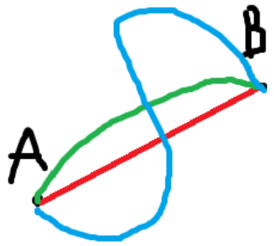
$$\int_a^b \left(f(x) + \frac{d}{dx}\sin f(x)\right) dx$$

Обозначать мы будем его как $\Phi[f(x)]$. Квадратные скобки указывают на то, что это не просто числовая функция, а функционал!

Экстремум
Важнейшей задачей матана-1 является поиск экстремума функции одной переменной. А матана-2 – экстремума многим переменным.

В физике твёрдый шарик  останавливается в точке минимума, она является «наилучшей» для него.
А что, если нам нужно найти наилучшее не число (матан-1), не набор чисел (матан-2), а… функцию? Функцию, для которой функционал $\Phi[f(x)]$ будет минимален.

Например, среди всех кривых, соединяющих на плоскости точки A и B, наименьшую длину будет иметь прямая:



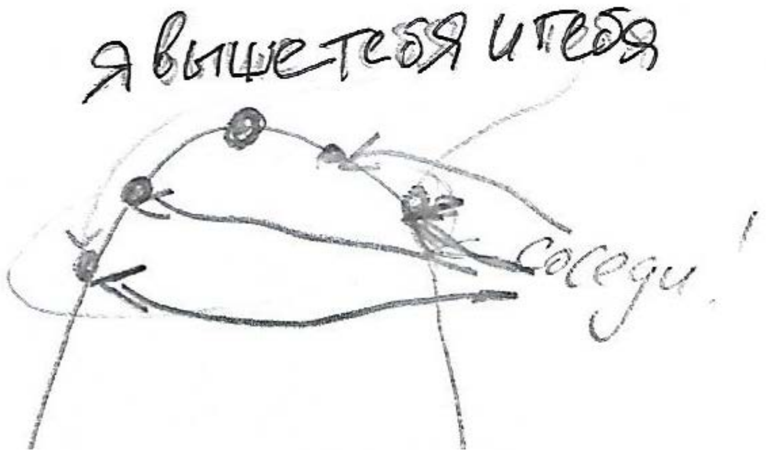
Т.к. длина вычисляется вот таким интегралом

$$\Phi[f] = \int_a^b \left(1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right) dx$$

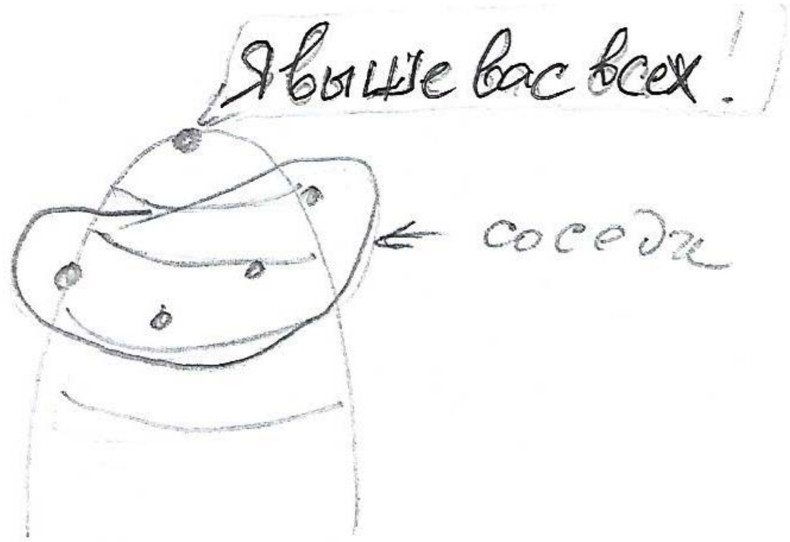
То можно сказать, что линейная функция через A реализует минимум функционала.

От экстремума к локальному экстремуму.

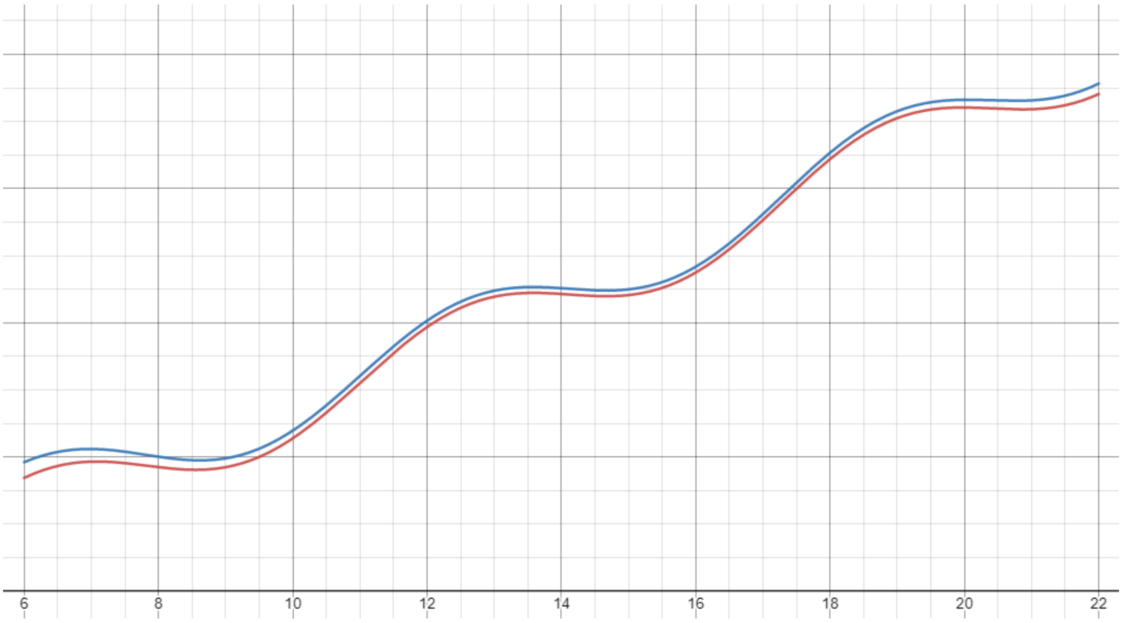
В матане-1 локальный экстремум был, когда значение функции в точке «уделывает» своих соседей:



В матане-2 так же:



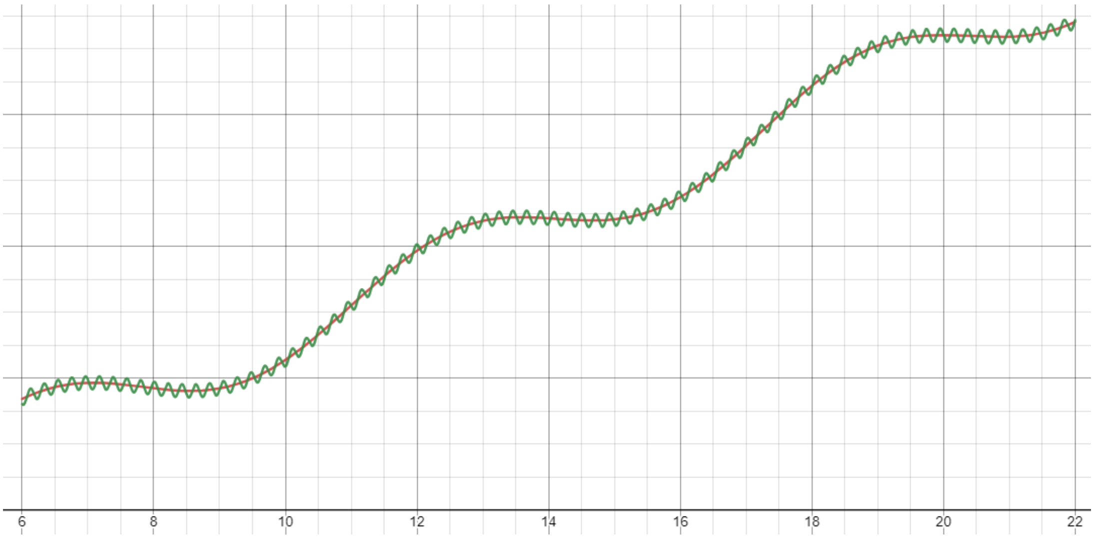
Но что такое соседние точки на прямой или в пространстве R^N - понятно. А что такое «соседние» функции?
Посмотрите на две функции.
https://www.desmos.com/calculator/qmhhjz5l1s
Они схожи?



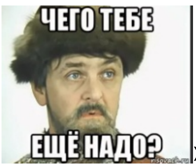
Думаю, да. А как вы это поняли? ~~По неправильным ответам~~ Графики близко! Т.е. максимальное расстояние мало:

$$|g(x) - f(x)|_{\text{норма в } C_0} = \max_{[a..b]} |g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

А вот эти две функции похожи?



Тут аудитория делится на две части:
Первая говорит «похожи – линии вон рядом, $\max_{[a..b]}|f(x) - g(x)| < \varepsilon$,



».

Вторая – да ну, производная у зелёной функции будет ну очень отличаться от производной красной функции. А это оказывается важно, если в функционале есть ещё и производная – например,

$$\Phi[y] = \int_a^b F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

Поэтому ввели ещё одну норму – C_1 – норму:

$$|g(x) - f(x)|_{\text{норма в } C_1} = \max_{[a..b]}|g(x) - f(x)| + \max_{[a..b]}\left|\frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}f(x)\right|$$

Которая учитывает ещё и производные.

Нетрудно видеть, что если норма в C1 $< \varepsilon$:

$$|g(x) - f(x)|_{\text{норма в } C_1} = \max_{[a..b]}|g(x) - f(x)| + \max_{[a..b]}\left|\frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}f(x)\right| < \varepsilon$$

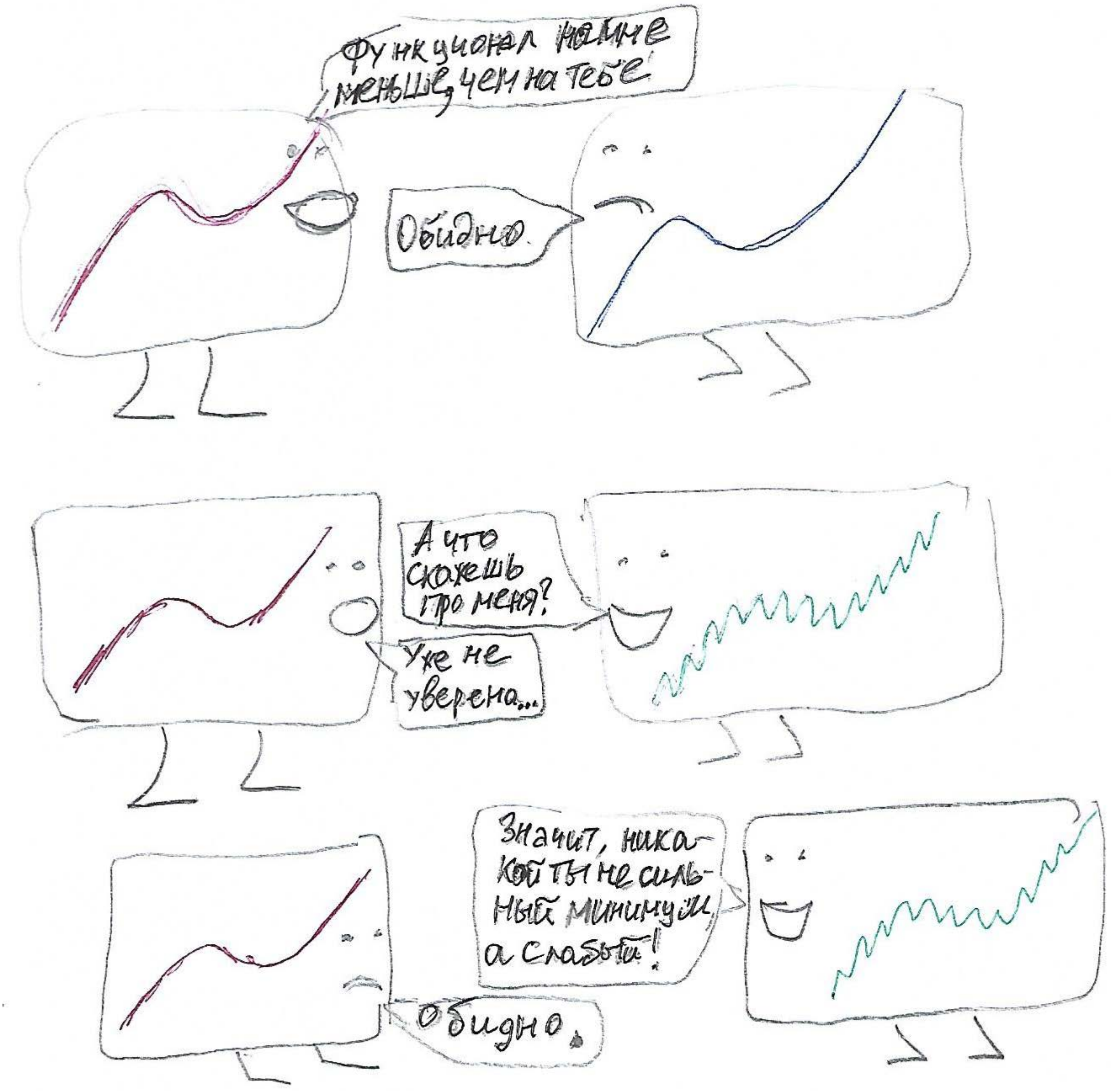
То норма в C0 и подавно $< \varepsilon$

$$|g(x) - f(x)|_{\text{норма в } C_0} = \max_{[a..b]}|g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Т.е. для любого ε C1-норма образует окрестность «соседних» функций меньше, чем C0:

Если минимум достигается лишь в C1-окрестности, но не в C0, где может найти функция, больше исходной:

то такой минимум называется слабым.
А если исходная функция настолько «царь горы» (или «царь ямы»), что и в C0-окрестности она реализует экстремум – то такой экстремум называется сильным.



Замечание. Никто нам не мешает продолжить строить нормы. Вот, например, C2-норма:

$$
\begin{aligned}
&|g(x)-\ f(x)|_{\text{норма в } C_2} \\
&\qquad = \max_{[a..b]}|g(x)-f(x)| + \max_{[a..b]}\left|\frac{d}{dx}g(x)-\frac{d}{dx}f(x)\right| \\
&\qquad + \max_{[a..b]}\left|\frac{d^2}{dx^2}g(x)-\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|
\end{aligned}
$$

Просто практического смысла в нормах большего порядка, как правило, нет.

Производная функционала по функции

В матане-1 мы брали производную по единственному аргументу.

В матане-2 – по всем многочисленным аргументам функции:

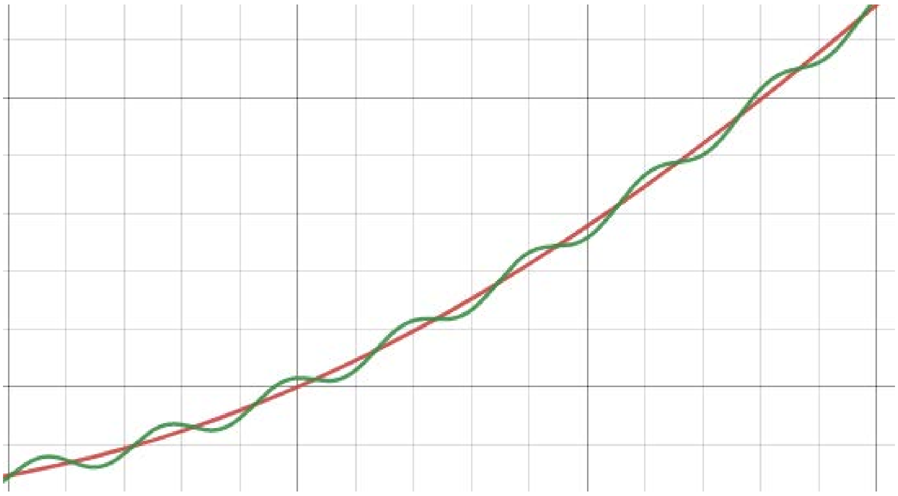
$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$$

Наша чуйка подсказывает нам, что сейчас, в 4-м семе, будет полная жесть – производных будет бесконечно много. И чуйка нас не обманывает – их действительно бесконечно много – сверхконтинуально много!

Определение. Пусть $h(x)$ – непрерывная на [a..b] функцией. Тогда произвольной функционала Φ[f] по h называется такой предел, если он существует:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi[f(x) + t * h(x)] - \Phi[f(x)]}{t}$$

Т.е. мы чуть отклоняемся от исходной f(x) с помощью функции h(x). Например, на рисунке мы отклонились с помощью h(x)=sin x:



Отклонились и считаем функционал уже на новой кривой $\Phi[f(x) + t * h(x)]$. Считаем приращение функционала $\Phi[f(x) + t * h(x)] - \Phi[f(x)]$, нормируем на t и получаем, как $h(x)$ влияет на функционал.

Замечание: иногда вместо «производная функционала по функции» говорят «вариация функционала по функции». Обозначается по-разному – я буду как $\frac{\delta \Phi[f]}{\delta h(x)}$

Теорема – необходимое условие экстремума. Функция $f(x)$ реализует экстремум только тогда, когда для любой функции $h(x)$ вариация функционала Φ окажется равной нулю.

Аналогия с матаном очевидна – в матане-2 мы требовали равенство нулю всех частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

А здесь требуется, чтобы вариация функционала по функции была ноль не для трёх переменных, а для любой функции $h(x)$!
Т.е. и $\frac{\delta\Phi[f]}{\delta \sin x} = 0$, и $\frac{\delta\Phi[f]}{\delta\, cos\ x} = 0$, и $\frac{\delta\Phi[f]}{\delta\, exp\ x} = 0$ - какую функцию $h(x)$ не возьми. И это всего лишь необходимое условие экстремума, а не достаточное.

Пример:
Найти условие минимума функционала с граничными условиями $f(a) = f(b) = 0$

$$\Phi[f] = \int_a^b f^n(x)dx$$

Решение. Прибавим к $f(x)$ слагаемое $t * h(x)$ и подсчитаем новый функционал:

$$\Phi[f + th] = \int_a^b (f(x) + t * h(x))^n dx$$

Тогда вариация по $h(x)$ есть

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi[f + th] = \int_a^b (f(x) + t * h(x))^n dx - \int_a^b f^n(x)dx}{t}$$

Если разложить в ряд Тейлора, то получим

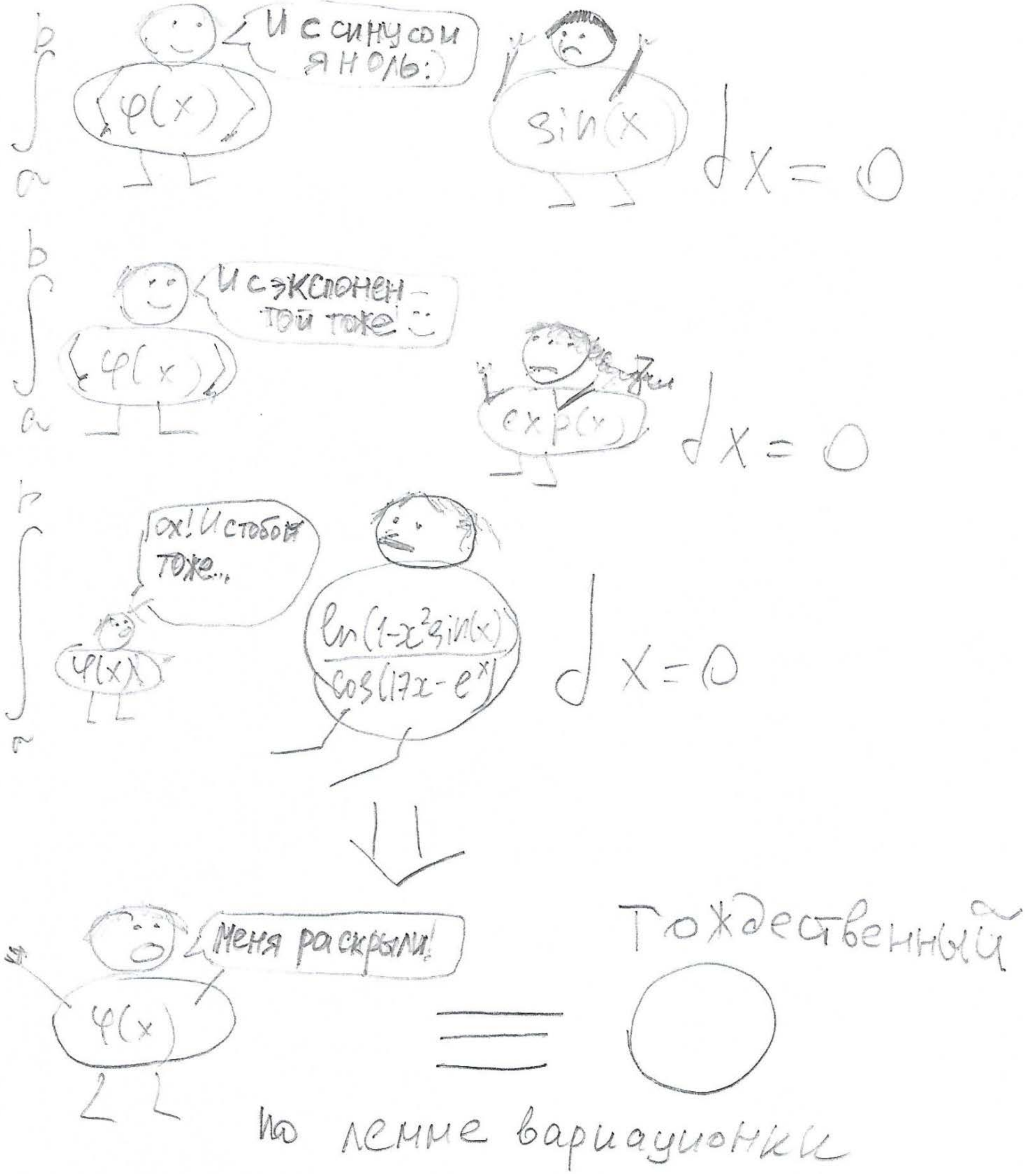
$$\lim_{t\to 0} \frac{\int_a^b (f(x)^n + n * f^{n-1}(x) * t * h(x) - f^n(x))dx}{t}$$

Т.е.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\int_a^b n * f^{n-1}(x) * t * h(x)dx}{t} = n\int_a^b f^{n-1}(x) * h(x)dx$$

Тут нам потребуется очевидная лемма
Пусть $\int_a^b \varphi(x) * h(x)dx = 0$ для любой $h(x)$. Тогда $\varphi(x)$ тождественный нуль.

Основная лемма вариационного исчисления. Пусть $\varphi(x)$ - фиксированная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, и для всякой непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, имеет место $\int_a^b \varphi(x)h(x)dx = 0$. Тогда $\varphi(x) \equiv 0$.



Вот её строгое доказательство от кафмата:

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ не равна нулю тождественно. Не ограничивая общности, будем считать, что эта функция принимает положительные значения (если $\varphi(x) \le 0$ для всех $x \in [a,b]$, то заменим $\varphi(x)$ на $-\varphi(x)$). Тогда в силу непрерывности $\varphi(x)$ существуют точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $\varphi(x_0) > 0$, и интервал $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq (a,b)$, $\delta > 0$ такой, что $\varphi(x) \ge \dfrac{\varphi(x_0)}{2}$ для любого $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$.
Пусть теперь $h(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\begin{cases} h(x) \equiv 0, & x \notin (x_0-\delta, x_0+\delta); \\ h(x) > 0, & x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_a^b \varphi(x)h(x)dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)h(x)dx \ge \dfrac{\varphi(x_0)}{2}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx > 0$, что приводит к противоречию с условием теоремы.

В качестве примера функции $h(x)$, удовлетворяющей записанным выше условиям, можно взять

$$h(x) = \begin{cases} (x-(x_0-\delta))^2(x-(\ x_0+\delta))^2, & x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta); \\ 0\ , & x \notin (x_0-\delta,\ x_0+\delta). \end{cases}$$

Я же расскажу «показательство». Доказываем от противного: пусть нашлась точка a, что $\varphi(a)! = 0$. Тогда возьмём в качестве $h(x) = б(x-a)$. Тогда $\int_a^b \varphi(x) * h(x)dx = \varphi(a)$ и это должно быть нулём и не нулём одновременно. Противоречие.
Проблема в том, что обобщённые функции – это не совсем функции. Впрочем, любую обобщённую функцию можно сколь угодно близко приблизить непрерывной функцией, так что по сути «показательство» работает.

Применяя лемму к нашему функционалу, получаем $f^{n-1}(x) =$ тождественный 0, т.е. $f(x)$ тождественный нуль. Вот мы и получили функцию, для которой функционал минимален.

Уравнение Эйлера.
Как вы видите, подсчёт вариации может быть достаточно муторным – это мы ещё взяли сверхпростой функционал – как правило, он ещё сложнее. Нет ли какого-то готового рецепта для подсчёта вариаций?
Есть. Правда, он годится не для всех функционалов, а только для функционалов такого вида:

$$\Phi[y] = \int\limits_a^b F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

Тренировка! Определите, для каких функционалов применима формула Эйлера:

$$\Phi_1[y] = \int_a^b \left(y^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2 dx$$

$$\Phi_2[y] = \frac{\int_a^b \left(y^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2 dx}{\int_a^b (y^2 - x^2)^2 dx}$$

$$\Phi_3[y] = \int_a^b \left(\frac{dy}{dx} * y + x * \frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

Ответ: только для $\Phi_1[y]$. $\Phi_2[y]$ не вида $\Phi[y] = \int_a^b \dots dx$, а в $\Phi_3[y]$ есть втора производная.

Итак, теорема Эйлера:
Если функция $y(x)$ реализует экстремум (не важно, какой: сильный или слабый) функционала

$$\Phi[y] = \int_a^b F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

то она удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{cases},$$

Немного издевательская теорема: нам, конечно, хочется использовать её в обратную сторону: решив краевую задачу с дифуром, утверждать, что мы нашли экстремум. Но, к сожалению, се ля ви – краевая задача лишь необходимое уравнение.
На семинарах по интурам вы только и будете делать, что проверять достаточные условия. Когда вы станете большими и будете учиться на старших курсах, то достаточные условия проверять уже не будете ☺ потому что попасть в y(x), для которой верно уравнение Эйлера, но не достигается экстремум, крайне маловероятно и такое возможно лишь на зачёте по интурам.

Обобщение уравнения Эйлера, о котором не говорит кафмат. Мы вот ограничились лишь первой производной. Меж тем функционал может быть вон каким:

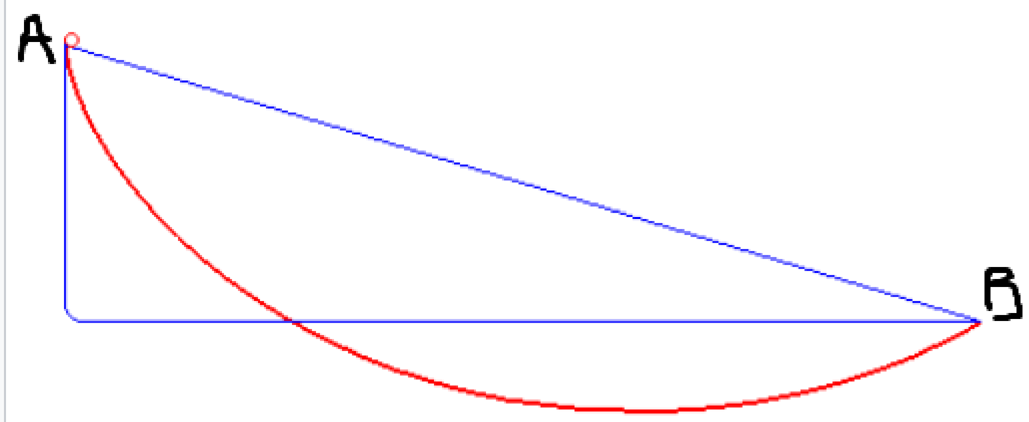
$$J = \int\limits_a^b F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x))\, dx$$

В этом случае в уравнение Эйлера надо добавить дополнительные слагаемые:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial f''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0$$

Пример из теормеха на использование уравнения Эйлера – зача о брахистоне, сформулированная Ньютоном в 1697 году и решённая Иоганном Бернулли в 1698 году.

Пусть нам нужно доставить шарик из A в B за кратчайшее время:



Какую форму жёлоба вы бы предложили? Прямой? Неэфективно: он будет долго разгоняться в начале и лишь к концу поедет быстро.
Оказывается, что наиболее эффективным жёлобом будет циклоида – на рисунке она помечена красным цветом. В Вики https://ru.wikipedia.org/wiki/Брахистохрона есть анимация.

Решение:

Направим ось ординат вниз и сопоставим начальной точке нулевое значение ординаты. Запишем закон сохранения энергии для материальной точки M:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$ где m — масса тела,
g — ускорение свободного падения,
y — ордината,
v — скорость движения тела.

Получаем: $v = \sqrt{2gy}$,
откуда можно найти значение проекции скорости на ось x: $v_x = \frac{v}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\sqrt{2gy}}{\sqrt{1+(y')^2}}$.

Поскольку время на спуск равняется $\int_a^b \frac{1}{v_x}\, dx$, то задача сводится к минимизации значения интеграла $\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}\, dx$.

Применим теорему Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{dy}\sqrt{\dfrac{1+(y^I)^2}{y}} - \dfrac{\partial}{dx}\dfrac{\partial}{dy^I}\sqrt{\dfrac{1+(y^I)^2}{y}} = 0 \\ y(a) = h \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

Решить в лоб эту задачу сложно, поэтому воспользуемся теоремой:

Теорема. Если в функционале $\Phi[y] = \int_a^b F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) dx$ функция F не зависит от x, то величина $F - y^I \frac{\partial F}{dy^I} = C$ является константой, и этим можно заменить более сложное уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} F - y^I \dfrac{\partial F}{dy^I} = 0 \\ y(a) = h \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

Доказательство:

$F = F(y, y')$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y - F_{y'y} y' - F_{y'y'} y'' = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0.$$

$$F - y' F_{y'} = C.$$

Применим эту теорему к нашей задаче:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+(y^I)^2}{y}} - y^I \dfrac{\partial \sqrt{\dfrac{1+(y^I)^2}{y}}}{dy^I} = 0 \\ y(a) = h \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}-\frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}=C.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}=C \quad \Leftrightarrow \quad y(1+(y')^2)=C_1.$$

Вводя параметр t по формуле $y'=\operatorname{ctg} t$, найдем

$$y(t)=\frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}=C_1\sin^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Теперь определим $x(t)$. Имеем

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\sin t\cos t\ dt}{\operatorname{ctg} t}=2C_1\sin^2 t\,dt\ =C_1(1-\cos 2t)\,dt,$$

откуда $\quad x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\sin 2t).$

Из полученных выражений для $x(t)$, $y(t)$ и условия $y(0)=0$, находим $C_2=0$. После замены $2t=t_1\ge 0$ и $\frac{C_1}{2}=\tilde{C}_1$ получаем уравнение брахистохроны

$$x=\tilde{C}_1(t_1-\sin t_1), \qquad y=\tilde{C}_1(1-\cos t_1).$$

Итак, брахистохрона – это циклоида, а $\tilde{C}_1$ находится из условия $y(x_1)=y_1$.

Один момент, о котором умалчивает кафмат, а меня он смущал в 4-м семестре

Мы вот пишем $F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)$. Не смущает ли вас эта запись? Ведь если мы знаем функцию $y(x)$, мы знаем и её прозводную $\frac{dy}{dx}$. Почему мы не пишем просто $F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)$?

Давайте посмотрим на запись вида $F(y(x),y^2(x))$. Пусть x – это какое-то число, например, a. Тогда $F(y(a),y^2(a))$ – тоже число. Можем ли мы, зная первый аргумент - $y(a)$ в точке a, вычислить второй - $y^2(a)$? Да, надо просто возвести второй аргумент в квадрат. Т.е. вместо внешней функции двух переменных можем сделать одну:

$$F(y(x),y^2(x))=G\big(y(x)\big)$$

где $G(z)$ по определению $=F(z,z^2)$

А теперь $F\left(y(x),\frac{dy}{dx}(x)\right)$. Мы знаем $y(a)$ в точке, можем ли вычислить $\frac{dy}{dx}(a)$? Нет – для этого нам нужно хоть немного, но окрестности! В этом и отличие. Мы можем соорудить $\hat{G}(z)=F\left(z,\frac{dz}{dx}\right)$. Тогда $F\left(y(x),\frac{dy}{dx}(x)\right)=\hat{G}[y(x)]$. Но только вот $\hat{G}$ будет уже оператором (я не поленился и поставить крышку) – хотя

бы потому, что сам дифференцирование $\frac{dz}{dx}$ само по себе является оператором. А оператор – это «новый уровень», как говорится.
И обратите ещё внимание на квадратные скобки - $\hat{G}[y(x)]$: они подчёркивают, что оператору нужна вся функция y(x), а не только её значение в какой-то точке.

Упражнение. Сообразите, где можно сократить число переменных:

$$1)\ F\left(y(x), \int_a^x y(t)dt\right)$$

$$2)\ F(y(x), y(x) - y(0))$$

$$3)\ F\left(\frac{dy(x)}{dx}, x - 1\right)$$

Ответ: только во 2).

Надеюсь, понятно объяснил. Я сейчас, в 8-м семестре пытаюсь вспомнить, как объяснял себе же в 4-м ☺

А что в 3D?

Пусть у нас уже функционал вида

$$\Phi[x(t), y(t), z(t)] = \int_a^b F\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)dt$$

Полагаю, вы скажете, как изменится уравнение Эйлера ☺

$$\begin{cases} \frac{\partial}{dx}F - \frac{\partial}{dt}\frac{\partial}{dx^l}F = 0 \\ \frac{\partial}{dy}F - \frac{\partial}{dt}\frac{\partial}{dy^l}F = 0 \\ \frac{\partial}{dz}F - \frac{\partial}{dt}\frac{\partial}{dz^l}F = 0 \\ x(a) = x_1 \\ x(b) = x_1 \\ y(a) = y_1 \\ y(b) = y_2 \\ z(a) = z_1 \\ z(b) = z_2 \end{cases}$$

Даже комментировать особо не хочется – всё это уже было на теормехе.