Сурс: http://math.phys.msu.ru/archive/2014_2015/121/IE_Lectures.pdf
Потенциальный читатель методички – тот, кто на семинары ходил, ботал и плюс-минус понимает, что там происходит, зато на лекциях, с его точки зрения, была полная дичь, доказывалось 100500 теорем про ИУФ-2 неизвестно зачем. Поэтому автор жжёт… не будет рассматривать материал с семинарских занятий, зато будет пережёвывать лекции.
В этой методичке нет вариационного исчисления, только интегральные уравнения и Штурм-Лиувилль.
Порядок тем по сравнению с учебником умышленно перемешан на более простой для понимания.

Ещё раз о том, что такое оператор

Мы ещё из школы хорошо знаем, что такое числовая функция: она переводит какое-то множество чисел в другое множество чисел.
А вот для операторов подопытными кроликами будут уже сами функции: он переводит некоторое множество функций в другое множество функций.
Примером оператора может быть оператор дифференцирования, которой каждой функции $f(x)$ ставит в соответствие другую: $\frac{d}{dx}f(x)$
Или оператор интегрирования:

$$\int_0^x f(s)ds$$

Или оператор Фредгольма:

$$\int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

Кстати, все эти операторы являются линейными. Напомню на всякий случай, что это значит: это значит, что если оператору $\hat{A}$ скормить линейную комбинацию $\hat{A}[au(x)+bv(x)]$, то он выплюнет $a\hat{A}[u(x)]+b\hat{A}[v(x)]$. А то, что операторы дифференцирования и интегрирования линейны, доказывалось ещё в матане-1.

О тонкой разнице между C[a..b] и h[a..b]

В курсе интуров, если вы читаете учебник, вам наверняка встречались фразы вида «пусть оператор такой-то действует из C[a..b] в h[a..b]», вызывая у вас вопрос: а если написать «из C[a..b] в C[a..b]» или «из h[a..b] в h[a..b]», что-нибудь изменится?
В курсе интуров рассматриваются непрерывные на [a..b] функции, которую образуют некое бесконечномерное множество. Обозначим его за N[a..b] – НЕобщепринятое обозначение, а обозначение лишь автора методы.

Существуют два способа вести норму на этом множестве:
Первый – линальный:

$$||y(x)|| = \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx}$$

Назовём такую норму – норму в пространстве h[a..b]:
Второй – в духе матана третьего семестра:

$$||y(x)|| = \sup_{[a..b]} |y(x)|$$

Именно такая норма была, когда мы говорили о равномерной сходимости функций.
Назовём такую норму – нормой в пространстве C[a..b].
Для примера перескажем утверждение из матана-3 в наших новых терминах: последовательность функций $y_n(x)$ равномерно сходится к y(x), если последовательность норм в пространстве C[a..b]. разности $y_n(x)$- y(x) стремится к нулю.
Словосочетания «пространство C[a..b]», «пространство h[a..b]» (если они не в контексте «норма в таком-то пространстве»!), хоть и встречаются в учебниках-лекциях, являются исключительно дурацкими и приводящими к непониманию. Нет никаких двух пространств, есть единое пространство непрерывных на [a..b] функций N[a..b], где мы ввели норму двумя способами, или, ещё лучше сказать, ввели две нормы – т.н. в пространстве C и в пространстве h.
А зачем нам две нормы? Норма нам нужна для формулировки и доказательства некоторых дальнейших теорем. Для каких-то теорем нам потребуется одна, для каких-то другая.

Преимущество нормы h – она очень хорошо дружит со скалярным произведением. Напомним, что скалярное произведение – это

$$\left(y_1(x), y_2(x)\right) = \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx$$

В этом случае скалярное произведение функции на саму себя – это квадрат её нормы в пространстве h[a..b]. Как и в случае с векторами! Но не квадрат её нормы в пространстве C[a..b]! Так что если мы завели речь про скалярное произведение и ортогональность функций (напомним, функции ортогональны на отрезке [a..b], если (это определение) их скалярное произведение 0), мы будем использовать норму в пространстве h[a..b], а вот цешная норма нам не пригодится.
Преимущество нормы C – она хорошо работает, если нужно доказать, что что-то к чему-то сходится. А именно, если у нас есть последовательность,

удовлетворяющая критерию Коши, т.е. для любого ε найдётся N, что для всех функций с индексом, большим N, норма их разности в пространстве C[a.b] меньше ε, то мы можем утверждать, что существует предельная функция y(x), к которой стремится последовательность (собственно, это матан-3, тема про равномерную сходимость). А вот если там будет стоять норма в пространстве h[a..b], то нифига это не так. Ведь норма h[a..b], напомню, в курсе матана-3 была в теме «сходимость в среднем», которая не обладала такими свойствами.
Именно поэтому мы будем использовать норму в пространстве C, когда будем говорить, что что-то к чему-то сходится.

Таким образом, думать – C или h, нужно лишь тогда, когда вы упоминаете норму. Во всех остальных случаях не нужно. Когда вы упоминаете скалярное произведение… ну у нас один способ адекватно вести скалярное произведение:

$$\big(y_1(x), y_2(x)\big) = \int_a^b y_1(x) y_2(x) dx$$

А вот для нормы два способа:

$$||y(x)|| = \sqrt{\int_a^b y^2(x) dx}, \quad ||y(x)|| = \sup_{[a..b]} |y(x)|$$

поэтому приходится уточнять.

Возвращаясь к вопросу в начале темы, мы теперь можем отметить: да ваще неважно, где там C, где там h, мы формулируем ОДЗ и МЗФ… то есть Множество Значений Оператора (МЗО). Про норму там вообще ни слова. Так что можем ставить где хотим C, где хотим h. А я внутри своей методы ваще буду писать «из N[a..b] в N[a..b]», но вы же помните, что это сугубо моё обозначение, и на экзе так нельзя.

Ещё немного насчёт терминологии – на экзе вас могут попросить всё-таки рассказать, что такое пространство C[a..b] и пространство h[a..b], хотя выше я уже сказал, что считаю такие формулировки крайне неудачными.
Пространство C – это N[a..b], где есть норма в пространстве C, но не существует нормы в пространстве h и скалярного произведения.
Пространство h – это N[a..b], где есть норма в пространстве h и скалярное произведение, но не существует нормы в пространстве C.
То есть мы, если провести аналогию с C++, мы вместо написания одного класса с тремя методами (нормой в C, нормой в h и скалярного произведения) написали

два – один с одним методом, другой с двумя. Естественно, это неудобно. Поэтому я и считаю данные обозначения дурацкими.

Ещё немного терминологии. Вас могут попросить прокомментировать фразу «пространство C называется полным». Полное пространство – это пространство, в котором любая фундаментальная последовательность (т.е. удовлетворяющая критерию Коши) сходится к элементу этого пространства. Этому требованию удовлетворяет пространство C (потому что тамошняя норма очень классно работает со сходимостью), но ни в коем случае не пространство h – тамошняя норма хреново работает со сходимостью.
Полное нормированное пространство называется банаховым (запомните это словечко, может попасться на экзамене в качестве одного из вопросов теормина).

А вот пространство h зато является евклидовым. Евклидово – это то пространство, где есть скалярное произведение. Этот термин также есть в теормине.

Интегральные уравнения:
Уравнения первого рода:
Фредгольма

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds$$

Вольтера:

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds$$

Уравнения второго рода:
Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

Вольтера:

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

Где λ – параметр.

Как вы видите, Фредгольм интегрирует от a до b, а Вольтера от a до x.

А как их решать?

Начнём с уравнений второго рода.

Интегральные уравнения второго рода:

Именно 2-го рода. Про ИУФ-1 и ИУВ-1 мы скажем несколько слов позже. Итак, вот они, наши герои:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

Где λ – параметр.

Отметим, что сложность решения ИУФа, будь то Вольтер или Фредгольм, напрямую зависит от функции-ядра K(x,s). В первую очередь нас интересует, нельзя представить ядро – функцию двух переменных, в виде суммы функций одной переменной:

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x)b_i(s)$$

Ядро, которое можно представить в виде такой конечной суммы, называется **вырожденным**.

Например, ядро sin(x+s) является таковым:

$$\sin(x+s) = \underbrace{\sin x}_{a_1(x)}\,\overbrace{\cos s}^{b_1(s)} + \underbrace{\cos x}_{a_2(x)}\,\overbrace{\sin s}^{b_2(s)}$$

Ядро sin(2x+3s) также вырождено:

$$\sin(x+s) = \underbrace{\sin 2x}_{a_1(x)}\,\overbrace{\cos 3s}^{b_1(s)} + \underbrace{\cos 2x}_{a_2(x)}\,\overbrace{\sin 3s}^{b_2(s)}$$

А вот ядро e^{xs}, например, вырожденным не является. Попытайтесь представить

$$e^{xs} = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) b_i(s)$$

и вы потерпите фиаско.

Отмечу: вырожденным называется оператор, который переводит ненулевой элемент линейного пространства (то бишь, если мы говорим об операторах, действующих на функции, не тождественный нуль) в тождественный нуль.
Так что говорите «оператор с вырожденным ядром». Длинно, но «вырожденный оператор», как хочется сказать, это немного другое.

Если ядро вырождено, то у нас есть совершённо чёткий алгоритм решения ИУФа через решение системы линейных уравнений, который разбирался на семинарах, повторять я его не буду.
А что делать, если ядро невырождено? Тогда следует проверить, не мало ли лямбда:

Пусть D – оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий из банахова пространства B в себя.

Определение. Оператор $\hat{D}$, действующий из банахова пространства B в себя, называется сжимающим (или сжимающим отображением), если существует константа q такая, что $0 \le q < 1$ и для любых $y_1, y_2 \in B$ выполнено неравенство $\|\hat{D}y_1 - \hat{D}y_2\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$.

Вопрос, который должен возникнуть: мы считаем норму по правилам C или h?
Ответ: по правилам C, и сейчас мы поймём почему.

Определение. Элемент y называется неподвижной точкой оператора $\hat{D}$, если $\hat{D}y = y$.

Теорема (о неподвижной точке). Пусть $\hat{D}$ – сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка $y \in B$ такая, что $\hat{D}y = y$. Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений (простой итерации): $y_{n+1} = \hat{D}y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_0 \in B$ - произвольная фиксированная точка пространства B (начальное приближение), причем $y_n \to y : Dy = y$.

В чём состоит идея: мы ищем решения уравнения $y = \hat{D}y$ методом научного тыка: взяли первый попавшийся игрек, после чего подействовали на него один раз оператором, потом ещё раз, потом ещё раз… ну как дали мартышке мобилку, а она с ней цацкается, на одну кнопку нажимаю. А самый прикол, что у этой мартышки будет получаться с течением времени сколь угодно близкий к нужному ответу результат, с чего бы она не начала. Это, конечно, будет заслуга оператора, что он такой хороший – сжимающий.

Ещё одна аналогия – пусть у нас пространство чисел, а оператор – это деление каждого числа на два. Естественно, неподвижной точкой будет зеро, и с какого бы числа не начала бы наша мартышка, применяя оператор всё больше, она получит ноль.

Конечно, мы нашу теорему будем применять для более продвинутых проблем: в роли пространства, где действует оператор D, у нас будет пространство непрерывных функций, а в роли операторов D нам бы хотелось видеть правые части ИУФ-2 и ИУВ-2 (тогда они как раз запишутся в виде $y = \hat{D}y$).

Всегда ли операторы из правых частей ИУФ-2 и ИУВ-2 (подчёркиваю – именно они, с f(x) и лямдой, а не просто интегральные операторы Фредгольма и Вольтеры):

$$\hat{D}y = \lambda \int_a^b k(x,s) + f(x)$$

$$\hat{D}y = \lambda \int_a^x k(x,s) + f(x)$$

являются сжимающими? Оказываются, не всегда, но иногда являются. А именно, для ИУФ-2

Теорема. Если $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ (такие λ будем называть «малыми»), то неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Где M – максимум функции на квадрате:

$$\max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)| = M$$

Как вы видите, всё зависит от λ – если оно достаточно, то всё ОК. А вот f(x) может быть любым.

Отметим, кстати, что будет, если уравнение с малым λ будет вырожденным. Дело в том, что в условии теоремы выше чётко сказано: решение единственное! Меж тем у что ИУФ-2, что у ИУВ-2, если они вырождены, есть решение в виде тождественного нуля. А это означает, что при малых лямбда однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Для ИУВ-2 всё ещё проще: при ***любых*** λ метод последовательных приближений приводит к успеху. Таким образом, для любого ИУВ-2 у нас есть алгоритм получения решения. Собственно, именно поэтому про ИУВ-2 никакие теоремы особо не доказываются: у нас есть алгоритм решения, так что цацкаться с теоремами о существовании не нужно.

Ещё один приятный бонус: мы, умея решать любые ИУВ-2 методом последовательных приближений, можем решать любые ИУВ-1. Как, вы спросите? Дифференцированием по x:

$$f(x) = \int_a^x K(x,s)y(s)ds$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x K(x,s)y(s)ds$$

В интеграле у нас x стоит как и верхний предел интегрирования, и в подынтегральной функции, поэтому при дифференцировании интеграла вылезает два слагаемых:

$$\frac{df(x)}{dx} = K(x,x)y(x) + \int_a^x K_x(x,s)y(s)ds$$

$$y(x) = -\int_a^x \frac{K_x(x,s)}{K(x,x)}y(s)ds + \frac{f_x(x)}{K(x,x)}$$

И вот мы свели ИУВ-1 к ИУВ-2, которое мы уже решать умеем!
А вот ИУФ-1 дифференцированием не решить, да и вообще с их решением всё плохо. Про них мы ещё поговорим.

Существует метод, похожий на метод последовательных приближений: через резольвенту. Он получается, если мы попытаемся применить метод последовательных приближений в общем виде.
Если за $\hat{A}$обозначить интегральный оператор Фредгольма:

$$\hat{A}y(x) = \int_a^x K(x,s)f(s)ds$$

То

Рассмотрим <u>метод последовательных приближений</u> в данном случае.

Пусть $y_0 \equiv 0, \quad y_{n+1} = \lambda \hat{A} y_n + f, \quad n = 0,1,2,\dots$. Тогда:

1) $y_1 = \lambda \int_a^b K(x,s) \cdot 0 \cdot ds + f(x) = f(x)$;

2) $y_2 = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x)$;

3)

$$y_3 = \lambda^2 \int_a^b K(x,\xi) \left(\int_a^b K(\xi,s) f(s) ds \right) d\xi + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x) = \lambda^2 \int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b K(x,\xi) K(\xi,s) d\xi \right)}_{K_2(x,s)} f(s) ds +$$

$$+ \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x),$$ где $K_2(x,s)$ - <u>повторное (итерированное)</u> ядро.

Продолжая процесс, получим $y_{n+1} = f + \lambda \hat{A} f + \lambda^2 \hat{A}^2 f + \dots + \lambda^{n-1} \hat{A}^{n-1} f + \lambda^n \hat{A}^n f$, где $\hat{A}^n$ – интегральный оператор с повторным ядром $K_n(x,s) = \int_a^b K(x,\xi) K_{n-1}(\xi,s) d\xi$, $n = 2,3,\dots,$ а $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$.

Мы уже доказали, что последовательность y_n имеет предел y, являющийся решением интегрального уравнения, причем y представляется рядом Неймана:

$$y = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \dots + \lambda^n A^n f + \dots .$$

Решение y(x) представляется в виде суммы некоего ряда (см.последнюю строчку)
Ну а далее, если немного поцацкаться, то это ряд можно представить как

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds$$

Резольвента – как философский камень: стоит проинтегрировать её с неоднородностью, так мы получим решение интегрального уравнения.

Обсудим преимущества и недостатки этих методов по сравнению друг с другом.
Преимущества метода последовательных приближений – нам не придётся считать конечный интеграл с резольвентой, а также очень удобен для программирования – сравнивая n-ную итерацию с n-1-й, и считая норму (в смысле C – максимум модуля на [a..b]) их разности, говорим, что если она ε, то на этом шаге мы уже нашли точное решение с точностью ε/2.
Преимущество метода с резольвентой – если надо решить множество ИУФ-2ов (или ИУВ-2ов) с одинаковым ядром, но разными неоднородностями, то резольвенту надо найти всего лишь один раз, а далее всего лишь проинтегрировать со всеми неоднородностями. Так сказать, один раз пострадать, ища философский камень, зато потом его применить множество раз. А вот наш оппонент, выбравший метод последовательных приближений, будет вынужден последовательно приближать каждый раз заново.

Отметим ещё одну приятную особенность: при малых λ решение устойчиво, т.е. при малых отклонениях f(x) решение y(x) меняется не сильно. Поэтому при малых λ, как говорят, задача поставлена корректна:

1) решение есть

2) решение единственно

3) при малых изменениях неоднородности f(x) решение y(x) меняется не сильно.

(Обращаю ваше внимание на разницу устойчивости в курсе интуров от устойчивости в курсе дифуров. В курсе дифуров мы чуть-чуть отклоняем начальное условие – то есть число или набор чисел, если у нас система. В курсе интуров мы чуть-чуть отклоняем целую функцию (!) – неоднородность f(x)!).

Кстати, а зачем вообще париться насчёт устойчивости?

А дело в том, что часто ставится такая задача: дано некоторое интегральное уравнение, K(x,s) известно точно, а вот неоднородность f(x) определяется экспериментом. И определяется, естественно, с погрешностью. И нам бы очень хотелось бы знать – от того, что мы чуть-чуть ошиблись в f(x), в y(x) мы тоже чуть-чуть ошибёмся?

И тут стоит рассказать про

Интегральные уравнения Фредгольма 1 рода.

Вот и в ИУФ-1 может так статься, что решение вполне себе существует, но стоит чуть-чуть поменять f(x) – и y(x) поменяется совсем не чуть-чуть. Именно поэтому ИУФ-1 НЕ являются корректно поставленными задачами.

Представим, что мы сели решать ИУФ-1 численно (а как ещё, если аналитически оно не решается).

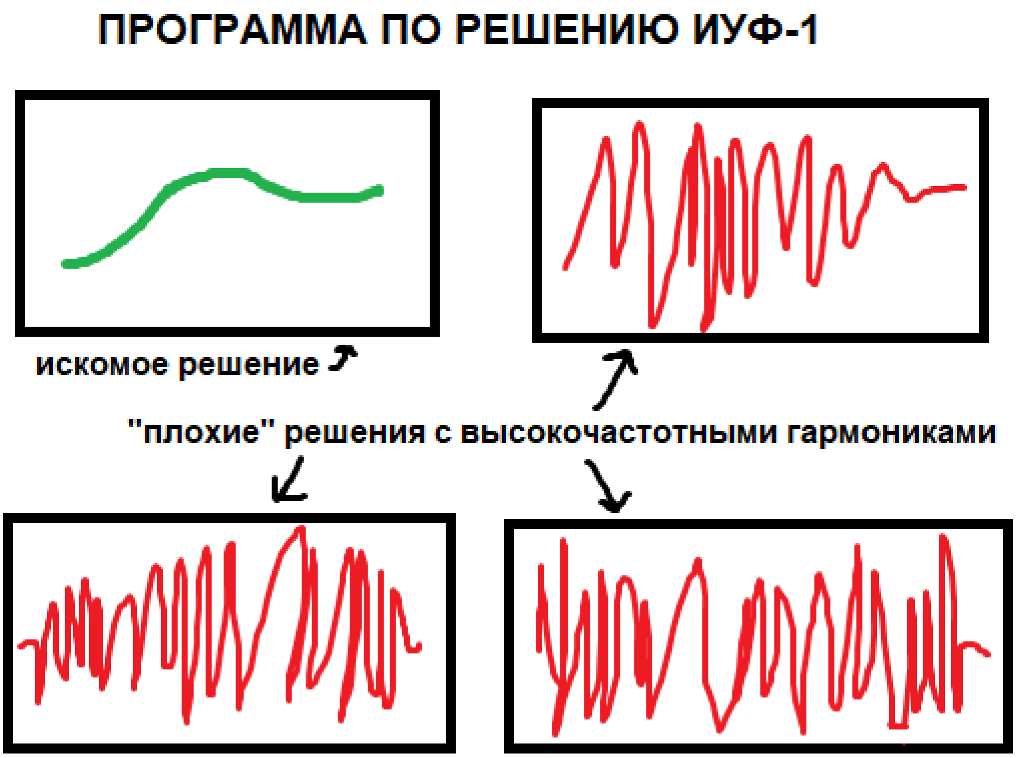
$$f(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds$$

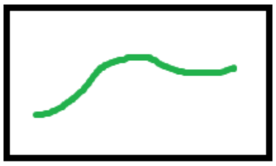
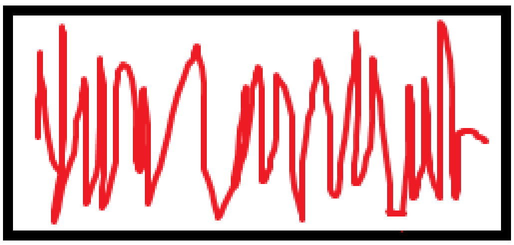
И пусть мы его решаем полным перебором

Пусть $y(s)$ - это точное решение. Получим ли мы его? Да. А вместе с ним ещё целую пачку «ненужных» решений. Ведь если к решению $y(s)$ добавить достаточно высокочастотную гармонику $A * \cos 10000x + B * \sin 10000x$ (коэфы при x подбираются из вида ядра – чем оно самое более высокочастотное, тем больше они должны быть), эта гармоника не появлияет интеграл – следовательно, интеграл

$$\int_a^b K(x,s)(y(s) + (A * \cos 10000x + B * \sin 10000x))ds$$

также будет стремиться к $y(s)$



А если мы численно будем решать не полным перебором (как его организуешь, полный перебор функций?), а более реалистично – итерационным способом, то вероятность того, что мы придём к нужному решению  крайне мала  ,зато мы получим нечто в духе  . Это всё – из-за неустойчивости ИУФ-1.

Что делать? Наш советский математик Тихонов придумал – регуляризация. Что это такое?

Впервые регуляризацией воспользовался Ньютон – ещё сам не зная, что это такое. Он считал производную вот так:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon$$

А далее клал $\varepsilon = 0$ и получал ответ $2x$.

Запомнили: ввести ненулевой ε, подсчитать, а затем положить его равным =0.

Ещё пример:

$$\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\, e^{-(i\omega+\varepsilon)t} dt$$

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(\omega)\, e^{-(i\omega+\varepsilon)t} d\omega$$

Это преобразование Фурье. В ряде случаев интеграл расходится, и приходится насильно с помощью ε загонять экспоненту. С ε интеграл уже берётся, ну а далее уже после взятия можно положить ε=0.
Между прочим, типичный сюжет в теорфизике!

Итак, идею регуляризации мы уяснили – теперь вернёмся к нашим баранам, т.е. уравнению Фредгольма 1-го рода.

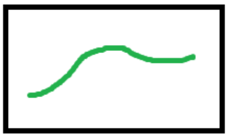
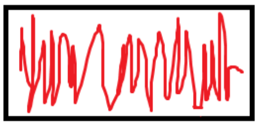
Давайте вспомним, что наш организм, когда в него попадает вирус. Повышает температуру? Зачем? Да потому что нам от большой температуры просто хреново, в то время как вирусам смертельно.

Идея: нужно как-то изменить задачу, чтобы «хорошему» решению стало немного плохо, а вот высокочастотным гармоникам сильно плохо:

Нужно искать минимум такого функционала:

$$\left(\int\limits_a^b K(x,s) y(s) ds - f(s) \right)^2 + \varepsilon \left(\int\limits_a^b K(x,s) \frac{dy(s)}{ds} ds \right)^2$$

Вот минимум функционала $\left(\int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(s)\right)^2$ - это просто решение ИУФ-1, а мы добавили добавку, содержащую производную $\frac{dy(s)}{ds}$. Ведь у всех этих высокочастотных гармоник производные очень большие.

И вот такую задачу мы уже скармливаем компьютеру. ε подбирается вручную. Слишком большое приведёт к сильному искажению хорошей функции , а малое будет плохо убивать высокие гармоники .

Кстати, тут прозвучало слово «функционал». Вообще это тема вариационного исчисления, но я думаю, вы читаете этот документ перед экзаменом и некое представление о вариационном исчислении у вас уже есть. Если нет, отложите эту тему, вернитесь после изучения функционалов.

Итак, подобьём итоги.
ИУВ-2 мы умеем решать при любых λ – ура!
ИУВ-1 тоже, сводя к ИУВ-2.
Т.е. у Вольтерра хорошие уравнения – решаются!
«Закон подлости работает – ни разу на моей практике мне приходилось с уравнениями Вольтерра встречаться. С уравнениями Фредгольма приходилось» (С) Силаев Пётр Константинович, д.ф.-м.н, проф., ведёт квантовую теорию.
ИУФ-1 очень плохое уравнение из-за своей неустойчивости, обосрать мы его тоже уже успели.
Осталось ИУФ-2. Мы можем его решить или если мала лямбда, или если вырождено ядро. А что, если ни то, ни то? Лямбда не мало, а ядро не вырождено. Может, мы хоть какие-то теоремы про существование или несуществования решения доказать сможем.

Теорема Фредгольма №3 (альтернатива Фредгольма):
Либо однородное уравнение Фредгольма разрешимо (т.е. λ – характеристическое число), либо неоднородное уравнение Фредгольма разрешимо при любой f(x)!
Либо здесь исключительное: или одно, или другое. Теорема называется альтернативой, именно в виде «альтернативы Фредгольма» и советую её запомнить.
Это некий аналог следующей теоремы с первого курса: или однородная система имеет нетривиальное решение (случай линейной зависимости матрицы системы), или же она имеет решение при любой нетривиальной правой части (случай

линейной независимости). Это её апгрейд. Аналогию очень советую запомнить и пропустить через себя: она поможет запомнить вам эту теорему.

Попытаемся её обкумекать. Пусть первое «либо» не выполнено: - ядро K(x,s) такое, что однородное ИУФ-2 имеет только тривиальное решение. Значит, мы сможем заявить, что имеется хоть одно решение ИУФ-2, какая бы ни была f(x) с этим ядром!
А теперь предположим, что нам попалось неоднородное ИУФ-2, и посмотрев на однородное ИУФ-2, мы пришли к заключению: всё-таки есть у однородного ИУФа-2 нетривиальные решения. Т.к. их линейная комбинация также является решением, то это множество решений нетривиального ИУФа является линейным подпространством N[a..b]. Имеет ли решение неоднородный ИУФ с таким ядром? Альтернатива Фредгольма нам всего лишь говорит, что неоднородное уравнение разрешимо не при всех f(x), найдутся f(x), что ИУФ-2 не разрешимо. Но у нас-то задана какая-то конкретная f(x). Как узнать, имеет ли решение ИУФ-2?
Для этого есть

Теорема Фредгольма №2. Необходимым и достаточным условиям решения неоднородного ИУФ-2 является ортогональность f(x) всем собственным функциям интегрального оператора Фредгольма с данным ядром.
Помните, что раз у неоднородного ИУФа-2 нашлись нетривиальные решения, то они образовали некое линейное подпространство, где мы можем выделить базис $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$…
Так вот, если наша f(x) из неоднородного ИУФа-2 им всем ортогональна, т.е.

$$\forall \text{ СФ } \varphi_i(x) \text{ верно } \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx = 0$$

То неоднородное ИУФ-2 с данной f(x) имеет решение.
А вот если она всё-таки резонирует с какой-то $\varphi_i(x)$ из той плохой компании:

$$\exists \text{СФ } \varphi_i(x) \text{ такая, что } \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx \ != 0$$

То хана – неоднородное ИУФ с данной f(x) решения не имеет.

В некотором роде теорема 2 является обобщением теоремы 3 (альтернатива Фредгольма). Советую освежить формулировку альтернативы Фредгольма, чтобы дальнейший текст был более понятен.. У оператора Фредгольма есть своя «плохая компания» - линейное пространство функций, удовлетворяющему однородному ИУФ-2. Критерий существования решения у неоднородного ИУФ-2 – надо, чтобы неоднородность f(x) держалась подальше от гопников… в смысле была ортогональна этой плохой компании, ортогональна любой функции оттуда! А если «плохая компания» состоит только из тождественного нуля (случай, когда однородный ИУФ-2 не имеет нетривиальных решений), то нам годится любая f(x), потому что плохой компании тупо нет, можно гулять спокойно ☺

Рассмотрим комикс. ИУФ-2 хочет решить, какую собачку из приюта забрать к себе домой:

Дело в том, что дома у него уже есть своя семья – собственная функция cos(s):

$$\int_0^{2\pi} K(x,s)\cos s\, ds = 0$$

, дочка оператора ☺

Синус ортогонален косинуса от 0 до 2π, т.е. такая собачка спокойно уживётся с дочкой оператора и соответствующий ИУФ-2 $\int_0^{2\pi} K(x,s)\,y(s)\,ds = \sin x$ будет иметь решение.

А вот синус x/2 неортогонален косинусу от 0 до 2π! Семья такого питомца не одобрит и у интура $\int_0^{2\pi} K(x,s)\,y(s)\,ds = \sin x/2$ решений не будет.

А если оператор бессемейный (т.е. СФ у него нет), то он может кого угодно домой таскать ☺

Следующий вопрос нас также будет интересовать: а часто ли бывает, что однородное уравнение имеет нетривиальное решение? Как часто реализовывается тот случай, что для утверждения существования решения у неоднородного ИУФа нам приходится проверять ортогональность?

Оказывается, это редко. Тут нам потребуется сделать вставку

Собственные значения и характеристические числа.

Рассмотрим однородное уравнение:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

Его можно переписать как

$$\Lambda y(x) = \int_a^b K(x,s)f(s)ds$$

где $\Lambda = 1/\lambda$.

Уравнение с Λ должно быть попроще для восприятия. Действительно, посмотрим на уравнение с Λ с точки зрения линала: мы подействовали на функцию y(x) оператором (причём линейным) и получили ту же функцию, только домноженную на некоторую константу. Что это напоминает? Собственные значения и собственные вектора в линале! Тут только у нас пространство не векторов (конечных упорядоченных наборов чисел), а функций (континуальных упорядоченных наборов чисел). Соответственно, вместо собственных векторов – собственные функции СФ. А Л – собственное значение.

Собственно, однородное ИУФ-2 сводится к вопросу отыскания СФ для заданного собственного значения Λ =1/λ.

Теорема Фредгольма №4, вполне непрерывность и введение в симметрические операторы.

У ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО оператора, может быть лишь не более, чем счётное число СЗ, и если бесконечное, то единственная возможная предельная точка собственных значений Λ – 0.

Что такое вполне непрерывный оператор, поясним позже. На самом деле любой интегральный оператор Фредгольма является вполне непрерывным. А пока проговорим условие теоремы.

То есть множество СЗ может быть таким:

½, 4, 7.

Может быть таким:

8, 5, 3, 1, ½, 1/3, ¼, 1/5…

А вот таким

1, 3, ½, 3, ¼, 3, 1/8…

Быть не может, потому что появилась предельная точка 3, а может быть только 0.

У теоремы 4 есть альтернативная формулировка через характеристические числа:

У ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО оператора, может быть лишь не более, чем счётное число характеристических чисел λ, и если бесконечное, то единственная возможная предельная точка характеристических чисел λ – бесконечность.

Важное замечание: теорема 4 в курсе интуров доказывается только для симметричных ядер (K(x,s)=K(s,x)), причём доказывается невероятно длинно и тяжело. Но она верна (курс лекций, страница 74) для любых ядер и интегральных операторов Фредгольма, порождённых ими.
Отметим, что всего лямбд у нас континуальное число, а T4 утверждает, что лишь для счётного числа лямбд однородное ИУФ-2 с вполне непрерывным оператором Фредгольма имеет нетривиальное решение. Ну не прелесть же? Значит, в большинстве случаев однородное ИУФ-2 с вполне непрерывным оператором Фредгольма имеет лишь тривиальное решение.

Пора бы уже сказать, какой оператор называется вполне непрерывным: тот, который непрерывен и любую ограниченную последовательность числовых функций переводит в компактную.
А компактная подпоследовательность – та, из любой подпоследовательности которой можно выделить ограниченную подпоследовательность.
Напомним, что любая компактная последовательность является ограниченной (докажем от противного: пусть последовательность неограниченна, т.е. из неё нельзя выделить сходящуюся последовательность, т.е. нашлась подпоследовательность, из которой нельзя выделить сходящуюся, противоречие), а вот обратное верно лишь в том случае, когда элементами являются числа или вектора (набор чисел) – нечто конечномерное, т.е. базис содержит конечное число элементов базиса.
В теормине есть такой вопрос:

Сформулировать необходимое и достаточное условие компактности последовательности векторов конечномерного евклидового пространства R^n.

Ну вот это как раз и есть ограниченность: в конечномерном пространстве ограниченность и компактность равносильны. Именно это доказывает теорема Больцано-Вейерштрасса.
В курсе же интуров подопытными кроликами выступают функции – элементы бесконечномерного пространства. Чтобы построить пример ограниченной, но компактной последовательности, нам достаточно взять и перечислять, перечислять и перечислять элементы этого бесконечного базиса. Только предварительно мы их должны нормировать, чтобы последовательность всё-таки была ограничена.
Пример такой последовательности: 1, cos x, sin x, cos 2x, sin 2x, cos 3x…

Как мы видим, требование достаточно серьёзное. Непрерывный оператор – это всего лишь тот, который близкие по норме функции переводит в близкие по норме функции. (это не определение, определение будет чуть позже). Вы увидели слово «норма», и у вас должен сработать рефлекс: норма в каком пространстве? В зависимости от того, какая норма, различают понятия непрерывности оператора в пространстве C и в пространстве h.

Точное определение непрерывности:

Определение А. Оператор $\hat{A}$ называется <u>непрерывным в точке</u> $y_0 \in D(\hat{A})$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(\hat{A})$ и удовлетворяющих неравенству $\| y - y_0 \| \le \delta$ выполняется неравенство $\| \hat{A}y - \hat{A}y_0 \| \le \varepsilon$.

Как и в курсе математического анализа можно сформулировать второе определение непрерывности оператора в точке.

Определение Б. Оператор A называется <u>непрерывным в точке</u> $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n \in D(\hat{A})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $y_n \to y_0$, последовательность $\hat{A}y_n$ сходится к $\hat{A}y_0$.

Разумеется, любой интегральный оператор является непрерывным и в смысле C, и в смысле h. Для примера докажем непрерывность интегрального оператора Фредгольма в смысле C:

$$\hat{A}y_2 - \hat{A}y_1 = \int_a^b K(x,s)\,y_1(s)\,ds - \int_a^b K(x,s)\,y_2(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b k(x,s)\,(y_1(s) - y_2(s))\,ds \le \frac{\|y_1 - y_2\|}{b-a} \int_a^b k(x,s)\,ds$$

функция только x,
Но не y_1 и y_2!

Но верен, как я уже сказал, ещё более удивительный факт: все интегральные операторы Фредгольма являются вполне непрерывными операторами. Вот если мы возьмём ограниченную, но не компактную последовательность функций, то подействовав на каждый член последовательности интегральным оператором Фредгольма, мы получим компактную последовательность. It is kind of magic. На самом деле это доказывается через теорему Арцела скучно, долго и неинтересно. А нужно нам это лишь для того, чтобы произнести теорему 4 о том, что СЗ может быть только счётное число.

Самосопряжённые операторы.

Ядро K(x,s) называется симметрическим, если K(x,s)=K(x,s)

Операторы Фредгольма с симметрическими ядрами являются самосопряжёнными операторами. Что это значит?

Напомним, что самосопряжёнными называются операторы такие, что

$$\left(\hat{L}y_1(x), y_2(x)\right) = \left(y_1(x), \hat{L}y_2(x)\right)$$

Т.е. Их можно «перекидывать» внутри скалярного произведения.
В случае, если у нас всё не действительное, а комплексное, такие операторы называются эрмитовыми. (привет квантам) Но у кафмата, всё, к счастью, действительно.
Оказывается, самосопряжёнными являются и интегральные операторы Фредгольма с симметричным ядром, и дифференциальные операторы Штурма-Лиувилля, о которых речь будет позже.
Докажем, что самосопряжённым является интегральный оператор Фредгольма с симметрическим ядром:

$$\left(\overbrace{\int_a^b K(x,s)\,y_1(s)\,ds}^{\hat{\Phi} y_1},\ y_2(x)\right) = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,s)\,y_1(s)\,ds_1\right] y_2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b\int_a^b K(x,s)\,y_2(x)\,y_1(s)\,ds\,dx = \int_a^b \hat{\Phi} y_2(s)\cdot y_1(s)\,ds =$$

$$= (\hat{\Phi} y_2,\ y_1).$$

Если непонятно, где мы воспользовались тем, что ядро симметрическое, то, если вы заметите, это там, где мы интеграл от $K(x,s)*y_2(x)$ можно представить как результат действия оператора Фредгольма Ф с крышкой на функцию $y_2(s)$. Если бы оператор был не бы симметрическим, то могли бы так сказать только про интеграл от $K(s,x)*y_2(x)$ (немая переменная интегрирования должна быть правым аргументом ядра).
Самосопряжённым является и дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля. Правда, не для всех функций, а только для тех, которые на концах отрезка [a..b] обращаются в 0.
Оператор Штурма-Лиувилля $\hat{L}$ – это дифференциальный оператор, делающий из функции y(x)

$$\hat{L}y(x) = \frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y(x)$$

Этакая вторая производная на максималках ☺

Покажем, что $(\hat{L}y, z) = (y, \hat{L}z)$, где скалярное произведение берется в пространстве $h[a,b]$. Легко видеть, что

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)z(x)dx = p(x)\frac{dy}{dx}z(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dy}{dx}\cdot\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)dx = -y\,p\frac{dz}{dx}\Big|_a^b + \int_a^b y\,\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)dx\,.$$

Подстановки обращаются в нуль в силу граничных условий. Отсюда сразу же следует симметричность оператора $\hat{L}$.

Существует вал теорем именно про самосопряжённые операторы. Тем самым, доказывая теорему про какой-то самосопряжённый оператор, мы убиваем двух зайцев: доказываем её и для оператора Фредгольма с симметричным ядром, и для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля.

Ещё про симметрические ИУФ-2.

Повнимательней рассмотрим интегральные операторы Фредгольма с симметрическим ядром. Мы уже сказали, что у них не более, чем континуальное число СЗ. Это была оценка сверху. А можно ли оценить число СЗ снизу? Оказывается, можно. Хотя бы одно СЗ у ИУФов-2 есть.

Теорема. У самосопряжённых ИУФ-2 существует хотя бы одно СЗ.

Эта теорема доказывается сложно и долго, в отличие от следующей:

Теорема. Разным СЗ соответствуют ортогональные СФ.

Если вспомните, такая теорема была ещё в линале и была доказана ещё тогда. Мы тогда, разумеется, использовались лишь самосопряжённость оператора, не вдаваясь конкретно, что он делает.

Напомним доказательство (а то линал был давно). Раньше мы это делали для векторов, теперь – для функций, но суть не меняется.

$$\hat{A}y_1(x) = \lambda_1 y_1(x)$$
$$\hat{A}y_2(x) = \lambda_2 y_2(x)$$

Воспользуемся самосопряжённостью оператора:

$$(\hat{A}y_1, y_2) = (y_1, \hat{A}y_2)$$
$$(\hat{A}y_1, y_2) = (\lambda_1 y_1, y_2) = \lambda_1(y_1, y_2)$$
$$(y_1, \hat{A}y_2) = (y_1, \lambda_2 y_2) = \lambda_2(y_1, y_2)$$

Откуда и получаем, что или равны СЗ, или СФ разных СЗ ортогональны.

Таким образом, у нас есть весьма хороший ортогональный базис. Нетрудно понять, что его можно ортонормировать, домножив все СФ на коэффициенты, чтобы их норма была единичной. А норма, кстати, цешная или ашная? Ну, конечно, в пространстве h, ведь тут вовсю участвует скалярное произведение, и нам удобно согласовать норму с ним.

Хорошо, хотя бы одно СЗ у нас есть… А мы можем узнать, их конечное или счётное количество?

Оказывается, можем. Помните, в самом начале методички у нас были ядра с вырожденным ядром? Так вот, оказывается, что конечное число СЗ у самосопряжённого оператора Фредгольма может быть только в том случае, если его ядро вырождено. Иначе – счётное.

Обсудим идею этого доказательства. Очевидно, что если ядро вырождено, то СЗ у него будет столько же, сколько слагаемых $a_i(x)b_i(s)$ содержится в ядре. Нам интересно доказательство в обратную сторону. Пусть $\varphi_i()$ – СФ, соответствующая СЗ $1/\lambda_i$.

1) Обозначим $K^{(1)}(x,s) = K(x,s)$.

2) Определим $K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$, и рассмотрим интегральный оператор $A^{(2)}$ с ядром $K^{(2)}(x,s)$. Все функции $\varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ остаются собственными

функциями и оператора $A^{(2)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots$, поскольку

$$\int_a^b K^{(2)}(x,s)\varphi_k(s)\,ds = \int_a^b K(x,s)\varphi_k(s)\,ds - \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) - 0 = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) \quad k = 2,3,\ldots$$

Функция φ_1 также остается собственной функцией оператора $A^{(2)}$, но отвечающей нулевому собственному значению ядра $K^{(2)}(x,s)$. Поэтому λ_1 отсутствует в последовательности характеристических чисел оператора $A^{(2)}$. Докажите самостоятельно, что оператор $A^{(2)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от указанных.

«Докажите самостоятельно» очень легко: пусть нашлось λ – СЗ оператора $\hat{A}_2$ с крышкой, которому соответствует СФ φ(x).

Выразим $K_1(,)$ через $K_2(,)$:

$$K_1(x,s) = K_2(x,s) + \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)\varphi_1(s)$$

И подсчитаем начальный оператор от φ(x):

$$\int_a^b K^{(1)}(x,s)\varphi\ (s)\,ds = \int_a^b K_2(x,s)\varphi\ (s)\,ds + \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\varphi\ (s)\,ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi\ (x) + 0 = \frac{1}{\lambda_k}\varphi\ (x) \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Откуда получаем, что φ(x) – это и СФ исходного оператора, противоречие.

Кстати, обратите внимание, что в доказательстве мы вовсю пользовались ортогональностью СФ, соответствующим разным сЗ. Это магия работает только в пределах Хогвардса – самосопряжённых ядер.

Так как оператор с ядром $K_2(,)$ – симметрический, самопряжённый, все дела, то у него также найдётся СЗ. Если число СЗ конечно, то рано или поздно мы их все исчерпаем, и тогда наше ядро распадётся на сумму $a_i(x)b_i(s)$. Следовательно, чтобы оно не распалось, СЗ должно быть бесконечно много, ч.т.д.

Штурм-Лиувилль и симметрические ядра.
Байка:
Когда Штурм умирал, он в последние дни жизни никого не узнавал и распознавал речь.
К нему пришёл друг-математик. Ему сказали, что поговорить со Штурмом уже не удастся. Но друг не отчаялся и спросил:
- А ну-ка, Штурм, двенадцать в кубе!
- Тысяча семьсот двадцать восемь, - сказал Штурм, и громко выдохнул. Это были его последние слова…

Какой логичный вопрос возникает у читателя: а что эта тема делает в курсе интуров? Это же дифуры, и более того, в курсе дифуров мы рассматривали такой дифур, и даже решали его с помощью функции Грина.
Но нет, в курсе дифуров мы решали чуть-чуть другое уравнение. Назовём его ШЛf (Штурм-Лиувилль с f(x))

$$\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y(x) = f(x)$$

С двумя краевыми условиями: y(a)=y(b)=0

И такой дифур действительно решается – вас его учили решать с помощью функции Грина. А мы будем решать немного другой дифур – ШЛλ – Штурм-Лиувилль с лямбдой.

$$\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{dy}{dx}\right) - \big(q(x) - \lambda\rho(x)\big)y(x) = 0$$

или, что то же самое

$$\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$$

который и называется (вместе с краевыми условиями) задачей Штурма-Лиувилля.
Первые два слагаемых дифура часто записывают как результат действия дифференциального оператора Штурма-Лиувилля L с крышкой на функцию y(x).
Если бы ρ(x) было тождественной единицей, то задача бы свелась к поиску СЗ и СФ оператора Штурма-Лиувилля.

Необходимо ответить на один вопрос: зачем одно и то же рассматривать два раза? Что нам мешает перенести слагаемое λ*ρ(x)*y(x), вынести там y(x) с множителем –(λ*ρ(x)+q(x)) и получить по сути ШЛf, только в правой части у нас будет тождественный нуль, ну а там мы и функцию Грина подрубим…
Не подрубим. Функция Грина, напомню, нужна для решения ШЛf с неоднородностью, не равной тождественной нулю, а вот с однородным ШЛf (где f(x)

тождественный нуль) функция Грина как раз не дружит: она существует тогда и только тогда, когда однородное ШЛf имеет лишь тождественное решение.
А оно при большинстве лямбд действительно имеет лишь тождественное решение. Лишь при некоторых (далее мы покажем, что таких лишь счётное число) оно имеет нетривиальное решение. Собственно, отыскание таких лямбд – и задача ШЛλ.

Ещё раз: задача Ш-Л – это задача **с параметром**. Нас интересует, **при каких значениях параметра λ система имеет нетривиальное решение.** Вспомнили задачу с параметром из ЕГЭ? ☺

Хорошо, а как такое решать?

Уравнение с f(x) из курса дифуров, которое мы назвали ШЛf мы умеем решать с помощью функции Грина. Не вдаваясь в подробности, предположим, что она существует и мы её нашли: это G(x,s).
Стоп! – скажете вы. – Совсем недавно вы утверждали, что функции Грина не существует, т.к. однородное ур-е имеет нетривиальное решение.
Но это я утверждал про это

$$\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{dy}{dx}\right)-\big(q(x)+\lambda\rho(x)\big)y(x)=0$$

Уравнение, а сейчас я говорю про ШЛf, где с функцией Грина как раз всё ОК:

$$\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y(x)=f(x)$$

Тогда решение y(x) ШЛf записывается как

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

Вопрос, который у нас стоит: можем ли мы с её помощью решить ШЛλ?

Отметим, что в роли f(x) у нас выступает -λ*ρ(x)*y(x). Давайте подставим его вместо f(x). Получим:

$$y(x)=-\lambda\int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\,d\xi$$

Естественно, это не решение, т.к. y(x) есть в обоих частях: мы сами виноваты, что вместо f(x) подставили функцию, содержащую игрек. Но зато мы получили однородное ИУФ-2!

Дальнейшая судьба зависит от вида ядра. Если оно вырождено – данный ИУФ-2 мы решить можем. Если нет – то не можем.
Структура функции Грина такова, что на вырожденность нам особо надеяться не стоит. Зато она симметрична (G(x,s)=G(s,x)), но ρ() всё портит!
Однако мы можем сделать некую замену, чтобы поручить ИУФ-2 с симметрическим ядром. Сразу отвечу, для чего: чтобы применить теоремы для ИУФа-2 с симметрическим ядром.
Если обозначить

$$\varphi(x) = y(x)\sqrt{\rho(x)}$$

$$K(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)}\,G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)}$$

То окажется, что

$$\varphi(x) = -\lambda \int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

Мы провели процедуру симметризации. Заметим, кстати, что лямбда перед интегралом осталась лямбдой, искомая функция была вынуждена домножиться на корень из ρ(x).
Кстати, в определении задачи Ш-Л требуют, чтобы ρ(x) и q(x) были неотрицательны (а ρ(x) вдобавок ещё и положительна), так что взятие арифметического корня корректна.
Так что, как уже было сказано, задача нахождения нетривиального решения задачи Штурма-Лиувилля равносильна решению ИУФ-2 с симметричным ядром.

Что мы знаем?
1) СЗ не более, чем счётное число.
Можно доказать, что это СЗ у дифференциального оператора Ш-Л именно счётное число, а не конечное.
2) Существует хотя бы одно СЗ.
3) СФ, соответствующие СЗ, ортогональны.
Кстати, насчёт 3). Что там насчёт ортонормированности? Ортономируем мы легко φ(x):

$$\varphi_{\text{норм}}(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}}$$

А вот y(x) уже будут хоть ортогональны, если соответствуют разным λ, но уже ортонормированны не просто так, а с весом ρ(x): $\sqrt{\rho(x)}$

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$$

$$\int_a^b y_i(x)\sqrt{\rho(x)}y_j(x)\sqrt{\rho(x)}dx = 0$$

Есть и несколько свойств, присущих непосредственно оператору L с крышкой, не связанных с самосопряжённым интегральным оператором Фредгольма:

1) Каждое СЗ имеет кратность единица.

2) Все СЗ положительны. Это, по-моему, единственная теорема, где нам важно, что q(x) неотрицательна при всех x на [a..b].

Как бы это всё запомнить?

Представьте себе, что система СФ оператора Ш-Л – это дети, а их игрушки – СЗ

И в семью пришли органы опеки. Что они видят? Детей у мамаши бесконечно много (а именно, счётное число), но у каждого есть своя игрушка – СЗ. У каждого СЗ только одна СФ, т.е. нет такого, что у двух детей одна игрушка. Также все игрушки хорошие – все СЗ >0 ☺ Так что органы опеки должны радоваться.

Одно их огорчит: все СФ ортогональны (с весом ρ(x)):

$$m \neq n \Rightarrow \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)\,dx = 0$$

Т.е. дети не играют друг с другом, а играют лишь со своими игрушками ☺

Немного передохнем и обсудим что-то попроще:

Союзное уравнение. Первая теорема Фредгольма – о союзном уравнении.

Читатель мог заметить, что теорем Фредгольма четыре, но сформулированы были только вторая, третья и четвёртая, а вот первой пока не было.
Дело в том, что первая – самая бесполезная. Сформулировать её, однако, надо, как и определение союзного уравнения и ядра.

Вот у нас есть ядро K(x,s).
Союзным к нему называется такая функция двух переменных K*(double1,double2), что
K(x,s) тождественно равно K*(s,x).
Ну то бишь если $K(x,s)=\sin(x)*\exp(x^s)$, то $K^*(s,x)=\sin(s)*\exp(s^x)$.

Союзное уравнение – это ИУФ-2, где вместо K(x,s) стоит K*(x,s).

Так вот, первая теорема Фредгольма утверждает, что для каждого λ союзное уравнение с союзным решением имеет подпространство решений с той же размерностью, что и подпространство решений исходного уравнения.

Почему эта теорема бесполезна? Потому что нам, здоровым людям, нужно бы решить ИУФ-2 с заданным ядром. На союзное уравнение нам по большей части насрать.

В формулировку первой теоремы лекторы также запихнули то, что подпространство решений ещё и конечномерно. Ну это мы ранее проговорили, но это вы также можете упомянуть.

Напоследок обсудим две именные теоремы: Гильберта-Шмидта и Стеклова. Первую вы забудете сразу после экзамена (как и определение истокопредставимости) (и в дальнейшем она вам не пригодится), а вторая частенько будет мелькать у вас на ММФ, но зачем она нужна – вы поймёте только там же. Моя бы воля – убрал бы обе теоремы из курса интуров, но раз они есть, давайте посмотрим…

Теорема Гильберта-Шмидта.

Сначала определение истокопредставимости:

Определение. Функция $f(x)$ называется <u>истокопредставимой</u> с помощью ядра $K(x,s)$, если существует непрерывная функция $g(s)$ такая, что $f(x)=\int_a^b K(x,s)g(s)ds$ или, что тоже самое, $f = Ag$ (т.е. $f \in R(A)$ - множеству значений оператора A, действующего $h[a,b] \to h[a,b]$).

Любой функции $f(x) \in h[a,b]$ можно формально сопоставить ее ряд Фурье по системе функций $\varphi_k(x)$, т.е. $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$

Давайте я его разжую другими словами, чтобы вы лучше поняли.

Вот у нас есть пространство N[a..b] непрерывных на [a..b], и мы поделали интегральным оператором Фредгольма на все функции из этого пространства. Если рассматривать N[a..b] как ОДЗ оператора, то то, что мы получили – множество значений оператора, все функции, которые можно получить благодаря действию этого оператора. Ну так вот, если f(x) в это множество значений входит, значит, она истокопредставима с помощью оператора Фредгольма с ядром К(x,s) – мы можем получить её, подействовав оператором на какую-то функцию из N[a..b].

Обратим внимание, что истокопредставимость зависит от оператора (т.е. от ядра этого оператора). Будет другой оператор – всё может поменяться.

Вот условие теоремы Гильберта Шмидта:

Теорема Гильберта-Шмидта. Если функция $f(x)$ истокопредставима с помощью непрерывного симметрического ядра $K(x,s)$, то она может быть разложена в ряд

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x), \qquad \text{где} \qquad f_k=(f,\varphi_k)=\int_a^b f(s)\varphi_k(s)ds,$$

причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a,b]$.

Где φ_k – СФ интегрального оператора, порождённого этим ядром К(x,s).

Нихрена не понятно, ведь верно? Если что-то истокопредставимо, то что-то разлагается в ряд… Да как эту муру понять и запомнить?

Издревле люди всё любили раскладывать по базису. Даже неандертальцы, поохотившись на мамонтов, затем сказав сородичу, что он «ОООАУУУЫЫЫ», потом уседались на камень в пещере и раскладывали всё по базису.

В случае конечномерных мы любой вектор В мы можем представить в виде суммой конечной суммы, разложив по базису векторов $Б_i$

$$\forall \text{ вектор } \vec{B} = \sum_{i=1}^{\dim V} B_i \vec{Б}_i,$$

$$B_i = (\vec{B}, Б_i)$$

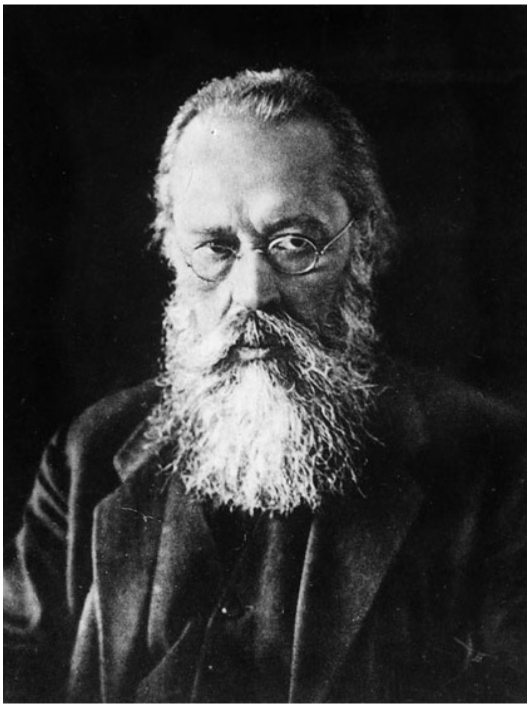
С коэффициентами, равными направляющими косинусами, которые мы можем выразить через скалярное произведение (считаем норму всех базисных векторов 1).
А вот в случае бесконечномерных пространств со счётным количеством базисных… в данном функций так просто не получится. А именно, всё зависит от случая: если базис фиговый и/или функция, которую мы пытаемся разложить в базис, то ряд сойдётся (а сойдётся он в любом случае), только вот не к тому, к чему надо. Об этом говорилось в матане-3, помните?

Так вот, теорема Гильберта-Шмидта говорит о том, что в случае, если f(x) истокопредставима с помощью интегрального оператора Фредгольма с K(x,s), то нам везёт и она раскладывается по СФ этого оператора.

Теперь, кажется, условие теоремы стало понятно. Возник следующий вопрос: а нахрена она? Зачем нам раскладывать f(x) по какому-то базису? Нам что, делать нечего? У нас, в отличие от неандертальцев, есть ещё Интернет, мы можем себе занятие поинтереснее найти.

Ответ №1 – эта теорема есть на экзамене. Как говорят в бугуртах, достаточно.
Ответ №2 – она потребуется на ММФ. Точнее, не она, а её апгрейд.
Ответ №3 – другой её апгрейд, теорема Стеклова, потребуется нам уже на этом экзамене, так что переходим к ней.

Теорема Стеклова.
Ля какой:



Байка для разрядки мозгов:
Однажды, когда академика Маркова спросили, что такое математика, он ответил: «Математика – это то, чем занимаются Гаусс, Чебышёв, Ляпунов, Стеклов и я».

Теорема. (Стеклова). Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ и обращающаяся в нуль на концах отрезка функция $f(x)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)$, где коэффициенты Фурье вычисляются по формуле $f_n=\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,y_n(x)dx$.

Как мы видим, теперь f(x) раскладывается не по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма (предварительно требовалось убедиться, что она истокопредставима с его помощью), а по собственным функциям (с весом ρ(x)) дифференциального оператора Штурма-Лиувилля.

Всяко разно – не шибко важные вопросы, которые могут попасться вам (и мне) на теормине, которые мы не обсудили в данной методе:

Сформулировать определение нормированного пространства.

Пространство, где определена норма. Хоть каким-то способом.
Она должна удовлетворять следующим простым свойствам:
1) Норма неотрицательна, причём равна 0 только для нулевого элемента
2) Неравенство треугольника: норма суммы не больше суммы норм.
3) Линейность при домножении на коэффициент.

Нетрудно показать, что и норма C, и норма h этими свойствами обладают.

Сформулировать определение метрического пространства.

Пространство, где определена функция двух аргументов, называемая расстояния, обладающая следующими двумя тривиальными свойствами:
1) Оно неотрицательно, причём =0 только в случае равенства своих аргументов
2) Функция симметрична относительно двух своих аргументов
3) Неравенство треугольника: сумма расстояний от A до B и от B до C не меньше расстояния от A до C.
Любое нормированное пространство является метрическим, т.к. в нём можно положить $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

Сформулировать определение интегрального оператора с полярным ядром.
Сформулировать определение интегрального оператора со слабо полярным ядром.

Рассмотрим интегральный оператор с таким ядром:

$$\frac{\Phi(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}$$

Где αбольше нуля, а $\Phi(,)$ – непрерывная функция, причём симметрическая, то есть аргументы можно менять местами.
В чём трабл? Ядро не непрерывно, а мы везде-везде до этого полагали, что ядро непрерывно.
Оказывается, что если $\alpha<n$ меньше размерности пространства, где живут x и s, то такие ядра называются полярными. Интегральные операторы с ними в принципе живут плюс-минус хорошо: они не то что непрерывны, они, если даже вполне непрерывны, например.
Помните, как в матане-3 вам рассказывали, что если функция стремится к бесконечности как $1/x^p$, где p меньше 1, то несобственный интеграл второго рода всё-таки сходится? Ну вот здесь то же самое.
Если $\alpha<n/2$, то это случай слабополярного ядра. Ну это как есть солёные и малосольные огурцы. Наше ядро по-прежнему непрерывное, но уже совсем малонепрерывное. В этом случае вдобавок верна теорема Гильберта-Шмидта.

Сформулировать определение нормы линейного оператора, действующего в нормированных пространствах.
Сформулировать определение ограниченного линейного оператора.

Операторы по-разному влияют на элементы пространства. Бывают, они повышают норму, бывают, понижают, а бывает когда как – какие-то вектора опускают, какие-то занижают. Например, оператор [всем известный преподаватель] опускает всех.

Так вот, норма оператора – это максимальное отношение нормы того, что получилось к норме того, что было. Так как нормы у нас две, то различают норму оператора в C и норму оператора в h.
Если такого максимума нет, то норма равна бесконечности и такой оператор называют неограниченным. Например, неограниченным является оператор дифференцирования: для любого числа найдётся такая функция sin(nx), норма которой не такая уж и большая (и в смысле C, и в смысле h), а производная может достигать сколь угодно большого значения n.
А если максимум такой есть, то оператор называют ограниченным – опять-таки, из C в C или из h в h.
Элемент пространства, на котором оператор проявляет себя на полную катушку, увеличивая его норму аж на норму оператора, называется максимальным элементом для данного оператора. Он может быть не один, конечно.