В тексте используется аббревиатура «титтк» - Тогда И Только Тогда, Когда…

Что такое операторы над числовыми функциями?
Давайте пока опустим понятие оператора из линала и вспомним понятие функции из 7 класса: правило, по которому каждому объекту из одного множества ставится в соответствие ровно один из другого.

Отдельно выделяют числовые функции, где оба множества – это числа. В дальнейшем под функциями будет иметь в виду числовые функции.

Функция: число -> число

А оператор – это правило, по которому одна функция ставится в соответствие другая:

Оператор: функция -> функция

Самый известный оператор – конечно, оператор дифференцирования. Можно, конечно, ещё придумать оператор $\hat{f}[g(x)]$, который всегда бы возвращал функцию $f(x)$ вне зависимости от данной $g(x)$. Читатель может придумать ещё операторы.
А что такое операторы в линале?

Функционалы и операторы.

Отпросился погулять,
Пишу сказку, дети,
Чтобы проще вам понять.
Но увы, жесток линал!
Встретил он функционал!
Кричал «Помогите», но нет, не спасло!
Домой вечерком вернулось число…

Вектор жил на свете,
Отпросился погулять,
Пишу сказку, дети,
Чтобы проще вам понять.
Шёл и кричал, функционал пугая матом!
После его задержал оператор!
Ох, и влип же этот обормот!
Он домой вернулся, но уже не тот…

Сразу удобнее их рассмотреть на контрасте. Функционал – это правило, по которому вектору сопоставляется число:

Функционал: вектор -> число

А оператор – правило, сопоставляющее вектору вектор:

Оператор: вектор -> вектор

Кафмат вам будет рассказывать, что в любой СК функционалы записываются как столбец чисел, а оператора как матрицы. Оно и логично - в операторе «больше информации» (мы должны вернуть целый вектор).

Вопрос. Найдите среди перечисленного тут функционалы и операторы. Какие из них вдобавок ещё и линейны?
1) Подсчёт длины вектора в 5D: на входе вектор, на выходе его длина
2) Подсчёт длины кривой графика функции по правилу $\int_a^b \left(1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right) dx$
3) Подсчёт первообразной с заданным условием y=0: $\int_0^x f(s)\, ds$
4) Взятие первообразной из п.3 в точке x=1.

Ответ: всё функционалы, кроме п.3; п.3 и 4 линейны, п.1 и 2 нет.

Давайте красиво это запишем.

$$\Phi_1[\vec{v}] = \sum_{j=1}^{5} v_j^2$$

$$\Phi_2[f(\quad)](\text{допустимо также } \Phi_2[f(x)]) = \int\limits_a^b \left(1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right) dx$$

$$\widehat{\mathrm{O}}_3[f(x)] = \int\limits_0^x f(s)\, ds$$

$$\Phi_4[f(x)] = \widehat{\mathrm{O}}_3[f(x)](1) = \int\limits_0^1 f(s)\, ds$$

Сразу скажу – я показываю пример образцово-показательной записи. Никто из лекторов-семинаристов так писать не будет. Но для знакомства полезно.
а) Аргумент берётся в квадратные скобки. В этом отличие от функции – там бралось число, здесь же целая функция (или вектор). На самом деле обычно квадратные скобки никто не пишет, вместо не пишут ничего (т.е. не $\hat{A}[\vec{v}]$, а $\hat{A}\vec{v}$).
Но ни в коем случае не круглые $\hat{A}(\vec{v})$.
б) Операторы обычно пишут с крышечкой.

в) Запись $\widehat{O}_3[f(x)](1)$ хоть и выглядит дико, формально верна: $\widehat{O}_3[f(x)]$ - функция, а после неё в скобках указывается аргумент. Более традиционный вариант $\widehat{O}_3[f(x)]_{x=1}$. Более того, последняя запись оказывается единственно понятной для записей вида

$$\hat{A}\hat{B}\big[u(x)+\hat{A}v(y)\big]_{x=1}+\hat{A}\hat{B}\big[u(x)+\hat{A}v(y)\big]_{x=2}$$
$$\hat{A}\hat{B}\big[u(x)+\hat{A}v(y)\big]_{x=1}+\hat{A}\hat{B}\big[u(x)+\hat{A}v(y)\big]_{y=2}$$

Что это вообще? Видно, что $\hat{A}\hat{B}[u(x)+\hat{A}v(y)]$ - это некая функция двух переменных. В первой строчке после подстановок и суммирования имеем сумму двух аргументов игрека, т.е. функцию одной переменной. А в нижней строчке – функция двух аргументов (сообразите, почему).

Можно придумать аналогично функциям многих переменных операторы многих функций:

$$\hat{A}[f(x),g(y)]$$

Но я таких на практике не встречал. Любопытный читатель может ради любопытства придумать несколько адекватных операторов многих переменной. Не знаю, можно ли там будет определить адекватно частную производную, но скажу, что свой аналог для частной производной есть у функционалов и называется вариационная производная (будет в 4-м семестре).

Собственные вектора и значения.

Определение. $\vec{v}$ называется собственным вектором оператора, если он ненулевой и существует такое λ, что

$$\hat{A}\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

Определение. λ называется собственным значением оператора, если он ненулевой и существует такой ненулевой вектор $\vec{v}$, что

$$\hat{A}\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

Заметим, что нулевое собственное значение определением исключается, а нулевой собственный вектор – нет. Естественно, это не закон какой-то страны, а просто договорённость математиков.

Точно также, как и деление на ноль – договорённость. Мы могли бы разрешить деление на ноль, введя дополнительное число ∞. Тогда $\frac{a}{0}=\infty$ для любого a, кроме 0. А что для $\frac{0}{0}$? Нужно ввести ещё один символ (пускай троеточие $\cdots$) для неопределённости. Но и без него проблем хватает: мы разучимся делать элементарные преобразования вида:

$$x+y=z+y$$
$$\downarrow$$
$$x=z$$

Потому что может оказаться, что y=∞ и тогда

$$0+\infty=1+\infty$$
$$\downarrow$$

$$0 = 1$$
Так что лучше «ящик Пандоры» не открывать и на ноль не делить.

А что с нулевым собственным значением? В отличие от догматичного кафмата, давайте проведём исследованием – почему эта договорённость имеет смысл.

Заметим, что нулевой вектор, если бы ему разрешили быть таковым, будет таковым для любого оператора и любого СЗ:
$$\hat{A}\vec{0} = \lambda\vec{0}$$

Является ли это поводом для бана ? Единица же является делителем каждого натурального числа, т.е. так же неинформативна, но её не банят.

Но есть два довода за бан:
а) Обычно у каждого линейного оператора столько же СЗ, какая у него размерность. Разреши бы мы бы нулевое СЗ, было бы «плюс один». Неудобно.
б) А почему бы тогда не забанить и нулевое СЗ? На первый взгляд, оно возможно лишь про нулевом СВ:
$$\hat{A}\vec{0} = 0\vec{0}$$
Но это первая мысль обманчива. Представим себе оператор проекции любого вектора на ось абсцисс. Тогда любой вектор вдоль оси ординат будет собственным с нулевым собственным значением.

Давайте зафиксируем эту мысль: если у нас нулевое СЗ, значит, оператор =- это проектор? Да, но как раз благодаря тому, что у нас нулевой СВ «в бане». Иначе бы мы не могли различить ситуацию «нулевое СЗ, т.к. оператор проектор» и «нулевое СЗ, но соответствующий нулевому СВ, а оператор любой».

Операторы-проекторы
Мы начали говорить про операторы-проекторы – но не дали строгого определения. Давайте это исправим.

Первая попытка: проектор – это оператор, который из
x_1 x_1
x_2 делает 0 , т.е. зануляет все компоненты, кроме одной.
x_3 0

Почему это определение говно?
Во-первых, проектор может быть не только на ось, но и на плоскость, гиперплоскость и т.д.

Во-вторых, проекция может быть на любую ось, а не только на ось абсцисс-ординат-аппликат. Там занудения компонент не будет. Так что определение должно не использовать координаты.

А истинное определение из разряда «нарочно не придумаешь»:
Оператор $\hat{P}$ называется проекторов титтк

$$\hat{P}^2 = \hat{P}$$

Т.е. для любого $\vec{v}$ верно

$$\hat{P}^2\vec{v} = \hat{P}\vec{v}$$

Если мы вторично спроектируем уже спроецированное, у нас ничего не меняется.

- Всем лежать, это ограбление!
- Всем лежать, это ограбление!
- Да мы и с первого раза легли…

Это определение хорошо тем, что инвариантно относительно систем координат. Почему это так важно?

Инвариантность или зачем нужны СЗ и СВ
Заметьте такую вещь: собственные значения одинаковы во всех с. Приведу аналогию из лингвистики: оператор – понятие, а слово – набор звук для записи слова в конкретном языке.

По-русски «кот», по-буржуйски cat, а на латыни catus. Но в каком языке мы бы кошку не записывали, у неё всегда будет 4 лапы и хвост.

Очень хорошо определять кота как «животное с 4 лапами, которое говорит «Мяу»» и очень плохо «то, что по-латыни catus». Формально верно, однако мы привязываемся к языку.

Очень хорошо изучать свойства операторов, а не свойства матриц. Представим себе, что мы взяли декартову СК и определили в нём такой оператор: вдоль оси x он растягивает вектора в 2 раза, вдоль оси y в 3, вдоль z в 4. Видно, что он в целом вектор растягивает. Матрица у него в данной СК

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

А теперь посмотрим на матрицу этого оператора в какой-то другой декартовой СК. Что-то недиагональное получится. И что будет понятно по такой матрице? а ничего!

А нахождение СЗ и СВ – это такой способ провести «дознание», «тест ДНК» - называйте как хотите. Вычисляем мы такие СЗ, а они 2-3-4 – значит, что он вектора растягивает. Вносит такой Гордон в «Мужское-женское» результаты ДНК-теста… ой, СЗ:

И читает: «СЗ оказались -1/3, 0, -1/2. Да вы, батенька, в двух направлениях скукоживаете, вдобавок меняя направление, а в третьем и вовсе проецируется». Ну и после аха аудитории – ещё и СВ: «Вдоль вектора $\vec{a}$ вы проецируете, вдоль $\vec{b}$ -1/3, вдоль $\vec{c}$ -1/2).

Вопрос 1. Может ли у последнего оператора существовать обратный?
Ответ 1. Он проектор, как мы узнали по СЗ, и обратного у него быть не может в принципе.
Вопрос. На предыдущей передаче «Мужское-женское» СЗ были операторы с СЗ { ½, 1, 3} и {1/3, 1, 2}. Являются они взаимно обратными друг к другу?
Ответ: надо ещё на СВ посмотреть. Если они сонаправлены – титтк тогда.

На сцене появляется скалярное проведение
Вопрос: в школе было понятное скалярное произведение:
$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$$
Зачем мы всё усложнили? Матрица Грама ещё какая-то всплыла… Сложно как-то.

Ну, вы догадываетесь, что нам в любом случае нужно проапгрейдить определение до любого конечномерного пространства без непонятного косинуса. Хорошо, вот вам другое определение:
$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j=1}^{N} a_j b_j$$
Простое и понятное. Зачем нам определять как скалярное произведение как «любая операция, удовлетворяющая каким-то там условиям»?

Ответ: потому что это обобщение помогает решать задачи. Например, доказать такое неравенство:
$$\int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \geq 2\int_a^b f(x)\,g(x)dx$$
За одну секунду:
$$|f|^2 + |g|^2 \leq 2(f, g)$$
Успехов его доказать методами матана ☺

Есть и ещё одна причина. Вопрос: в общем случае скалярное произведение задаётся матрицей Грама?
Ответ: обязательно нужно добавить «матрицей Грама С УКАЗАНИЕМ БАЗИСА, где она построена». Потому что если мы базис поменяем, матрицу Грама тоже придётся пересчитывать (поэтому лектор и выводит правило, как она меняется при изменение базиса).

А теперь вспомним нашу попытку задать скалярное произведение во всех базисах:
$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j=1}^{N} a_j b_j$$
(т.е. с единичной матрицей Грама).
Если мы будем скакать между ортонормированными базисами, матрица Грама останется неединичной. Ступим лишь в ортогональной – перестанет быть единичной, но останется диагональной. А коли ступим не в ортогональной – и диагональной быть перестанет.

Плохие базисы и бесконечные скачки между базисами
Абзацем ранее мы как раз затронули тему плохих базисов, что порождает

Вопрос 1: зачем нам переходить в «плохие» базисы, когда у нас есть хорошие ортонормированные?
Вопрос 2: зачем нам в принципе скакать между базисами?

Начнём с первого. Любому первокурснику очевидно, что фундаментальные физические законы записываются хорошо в хороших базисах. Например,

$$F_x = ma_x$$
$$F_y = ma_y$$
$$F_z = ma_z$$

А как записать второй закон Ньютона в полярной СК? В сферической СК? Вот то-то и оно.

Но на самом деле фундаментальные физические законы должны записываться во всех СК. Погуглите, что такое «Гамильтонов формализм» (или посмотрите 5-й семестр теормеха) – это некая попытка проапгрейдить Ньютона до любой СК. И причём успешная.
Ну и стандартный ответ «А в общей теории относительно ортогональный базис выбрать в принципе нельзя» тоже верен.

Второй вопрос хитрее. Он подразумевает «Выбери базис и исследуй там свою механику». Действительно, на теормехе во второй половине 4-го семестра вы будете исследовать движение тел в выбранной СК без всяких прыжков.
Только есть и второе направление: попытаться обновить именно основы физики. Так, благодаря обобщению на «плохие СК» возник гамильтонов формализм, теория относительности и т.д.
Вам может хард-подход с двигаением основ вместо узнавания частностей не нравится, что лишь говорит о том, что теорфиз вам не подойдёт (ничего страшного в этом нет).

Категории операторов

Самосопряжённые или эрмитовы: $\left(\hat{U}^*\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\hat{U}\vec{b}\right)$
Евклидовы и унитарные: $\left(\hat{U}\vec{a},\hat{U}\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$

У какой-то пары операторов из списка выше ещё матрицы симметричны (комплексно симметричны).

А что с физсмыслом?
Эрмитовы операторы (простите, я буду использовать «комплексные» названия, действительные никто не использует) красивого физсмысла не имеют. На квантах вам будут рассказывать «все операторы в квантах эрмитовы, это необходимо, чтобы СЗ были действительны». При этом это утверждение не будет использовано ни в одной задаче. Так что свойство бесполезно и непонятно.

Противоположная ситуация с унитарными (простите, я буду использовать «комплексные» названия, действительные никто не использует) операторами. Там есть очень чёткий смысл: унитарные операторы – это операторы поворота.

Ещё раз посмотрим:
$$\left(\hat{U}\vec{a},\hat{U}\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$$
А теперь сравним с операторами поворота. Они поворачивают оба вектора «в одну и ту же сторону». От такого скалярное произведение и не меняется. Видите?

Это что касается конечномерных пространств. А что касается бесконечномерных пространств с числовыми функциями – какие там унитарные операторы есть? Например, оператор трансляции – который сдвигает график функции вдоль оси абсцисс:

$$\hat{O}[f(x)] = f(x + a)$$

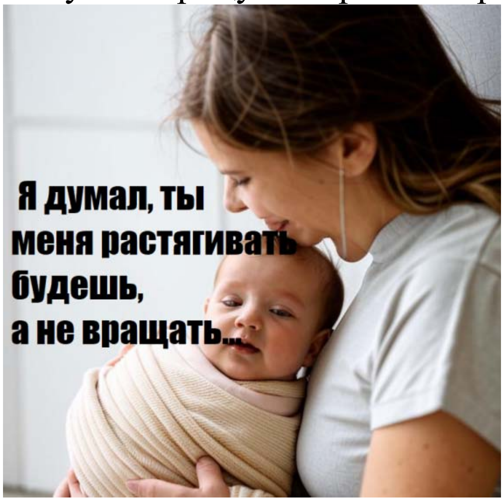
Читателю предлагается проверить, что он унитарный, если норма определена как интеграл от –inf до +inf (кстати, почему важно, чтобы именно такие границы?)

Казалось бы, приведённые два примера унитарных операторов – поворота и трансляции – совершенно разные: в одном мы «крутимся», в другом «шагаем вдоль оси абсцисс прямолинейно». Как такие разные операторы могли попасть в одну категорию унитарных операторов?

А всё-таки что-то общее у них есть. Вселенная изотропна <=> если мы повернёмся, мы увидим такую же Вселенную (глобально, без точного положения звёзд) с теми же законами физики. Если мы прошагаем 1 млрд световых лет, там будут те же законы физики, что и в исходной точке (желающим поспорить, что Вселенная имеет сферическую структуру вокруг точки Большого взрыва, указываю, что там неевклидова геометрия и всё не так, как вам кажется, работает). Т.е. унитарные операторы – это операторы, относительно которых всё инвариантно (по определению они не меняют лишь скалярное произведение, но этого достаточно, чтобы они не меняли всё другое).

Задача читателю: доказать, что все унитарные операторы имеют норму 1. Это, кстати, откликается с их названием: UNIT, UNO, ну вы поняли.

Ещё у унитарных операторов всё обычно печально с СЗ и СВ. Можете взять любую матрицу поворота и проверить. Сообразите, почему ☺



Метод ортогонализации Грамма-Шмидта.

Почти ненужная хрень. Кафмат его разбирает достаточно подробно, так что давайте лучше подумаем насчёт его применения.

Кафмат говорит «он нужен, чтобы сделать из неортогонализированного базиса ортогонализированный базис». Так-то оно так, но фишка в том, что гораздо проще построить ортогонализированный базис «с нуля» ☺ Например, в 3D есть очень чётенький ортогонализированный базис:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Кафмат отвечает: иногда нужно, чтобы в новый базис входил вектор из старого.

ОК, пусть нам нужно, чтобы новый базис содержал старый вектор, допустим, $\begin{matrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}$.

Находим матрицу поворота, переводящую $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ в $\begin{matrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}$, и применяем её к оставшимся векторам $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ - и дело в шляпе ☺