

Задача № 3

Найдите сечение ядерных реакций, вызываемых протонами, допуская, что ядра представляют собой одинаковые заряженные сферы радиуса R , а реакции происходят лишь при непосредственных столкновениях протонов с ядрами.

Замечание для фанатов квантмеха: «да как вы посмели решать задачи про микромир без квантмеха, в классическом приближении». Протоны и ядра достаточно тяжелы, чтобы классика худо-бедно, но работало. Вот к электронам классическая механика неприменима абсолютно, они слишком лёгкие.

Замечание для фанатов электрода: из-за движения электрона с ускорением он будет терять энергию, сила радиационного трения, все дела. Но мы эти эффектами в теореме пренебрегаем. У нас же не электрод.

Заметим, что если бы не было кулоновского взаимодействия, то ответ был бы тривиален – πR^2 .

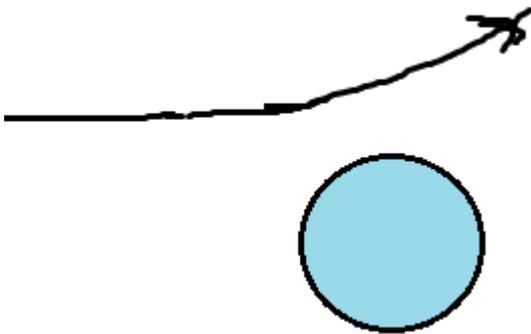
этот протон упадёт на ядро



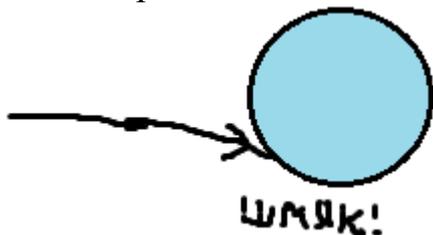
Попадут ровно те протоны, которые находятся в цилиндре, площадь сечения которого πR^2 .

Но ядра и протоны отталкиваются, за счёт чего сечение уменьшается. Давайте рассуждать, что делать в этом случае..

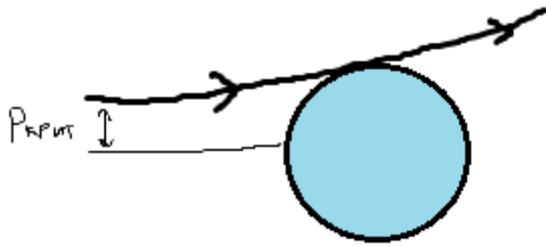
Если начальное прицельное расстояние $\geq R$, то ядерной реакции 100% не было. Из-за кулоновского отталкивания протон отклонится и ядра не коснётся.



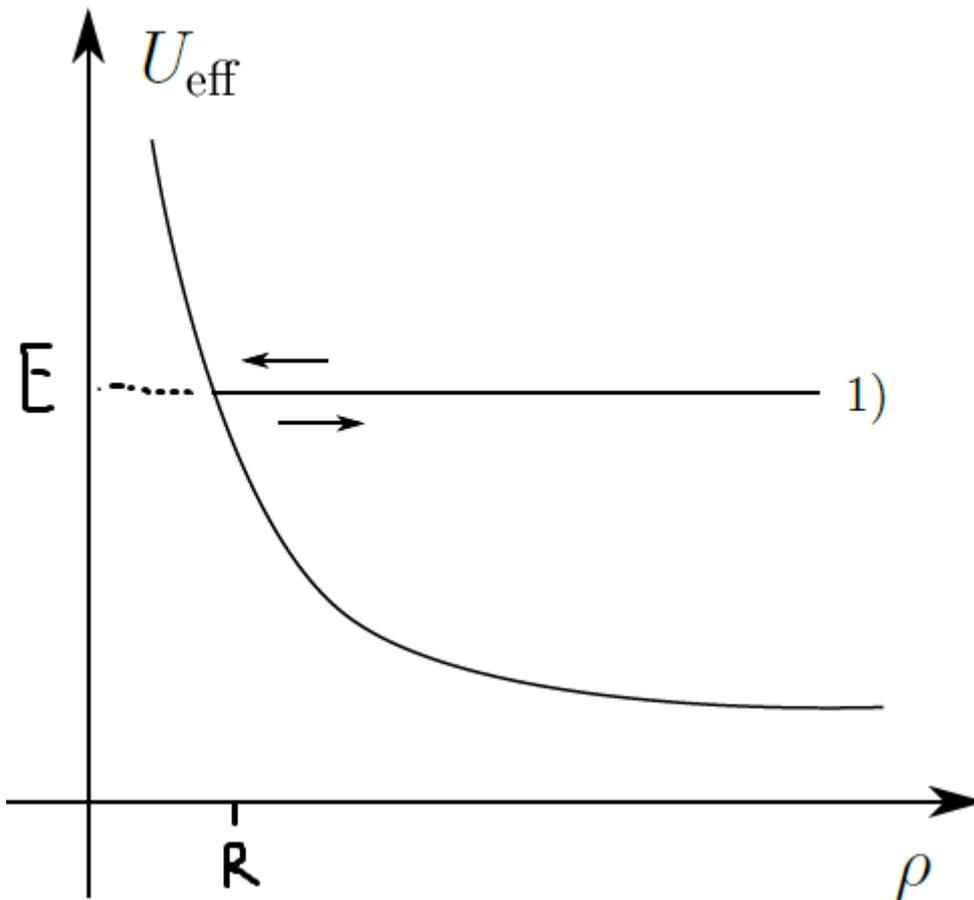
Если начальное прицельное расстояние очень мало, то реакция всё же будет – шмяк произойдёт.



Будет некое критическое значение прицельного параметра, при котором траектория протона будет, касаясь ядра.

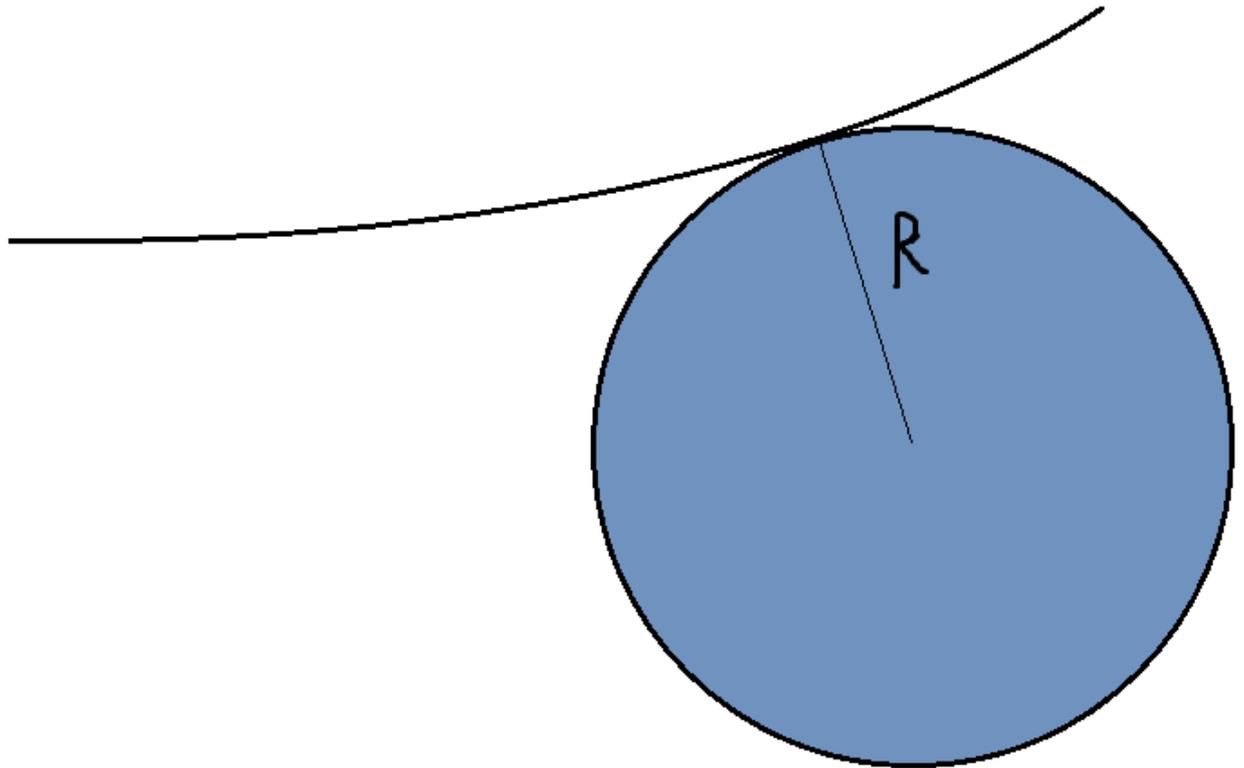


Давайте представим себе, как выглядит график эффективного потенциала: $U_{\text{эфф}}(r) = Ze^2/r^2 + L^2/(2mr^2) = b/r^2$, где $b = Ze^2 + L^2/(2m)$.



Летит такая частица из бесконечности к потенциальному центру, r (или ρ у Степаньянца, это одно и то же) монотонно снижается. Но потенциал всё выше. Рано или поздно энергии E частицы уже не хватит на дальнейшее приближение к центру, и r она начнёт снова расти.

В момент наименьшего расстояния от частицы до центра $U_{\text{эфф}}(r) = E$. А теперь вспомним нашу картинку:



Наименьшее расстояние от частицы до центра за всё время и есть R !

Вот оно, искомое уравнение: $E = U_{эфф}(R)$!

Тогда $E = b/R^2 \Rightarrow b = ER^2$, т.е. $ER^2 = Ze^2 + L^2/(2m)$.

Здесь мы знаем всё, кроме L^2 . Выразим: $2m(ER^2 - Ze^2) = L^2$

Но L – это исходный момент импульса, т.е. $mv_{на\ бесконечности} * p$ (p – прицельный параметр). Тогда $p^2 = L^2 / (mv_{на\ бесконечности})^2 = 2m(ER^2 - Ze^2) / (mv_{на\ бесконечности})^2$. Ещё нужно избавиться от скорости на

бесконечности: $E = mv_{на\ бесконечности}^2 / 2$, тогда $p^2 = 2m(ER^2 - Ze^2) / (m^2 * 2E/m) = (ER^2 - Ze^2) / E = R^2 - Ze^2/E$.

А сечение – это $\pi r_{крит}^2 = \pi(R^2 - Ze^2/E)$. Ответ получен.

Отметим, что мы получили меньше πR^2 как раз за счёт кулоновского отталкивания: часть протонов, которые бы упали на ядро без кулоновского отталкивания, благодаря нему оттолкнулись.

Также, судя по ответу, чем больше E , тем больше сечение. Так оно и есть: чем больше энергия частиц, тем больше они летят напролом, не обращая внимания на потенциальную энергию Кулона (малую на фоне их огромной энергии), и напролом в ядро врежутся. А вот если частицы низкоэнергетические, то сила Кулона их развернёт под большими углами, и свидания с ядром у них не будет.